UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2017-2018

Prova scritta del 18-6-2018

TESTO E SOLUZIONI

Avvertenze:

A. Per il recupero del primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3;

B. Per il recupero del secondo esonero svolgere gli esercizi 4,5,6;

C. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 + X_2 + X_4 = -1 \\ X_1 + kX_3 + X_4 = 2 \\ -X_1 + 2X_3 - X_4 = -2 \\ X_1 + X_2 - kX_3 = 1 \end{cases}.$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

SOLUZIONE COME RECUPERO DEL I ESONERO:

(ovviamente valida anche come scritto)

Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & k & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -k & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_3 si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & k & 1 & 2 \\ k & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui le operazioni $R_2 \to R_2 + R_1, R_3 \to R_3 + kR_1, R_4 \to R_4 + R_1$ danno

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & k+2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2k & 1-k & -1-2k \\ 0 & 1 & 2-k & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \to R_4 + R_2$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & k+2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2k & 1-k & -1-2k \\ 0 & 1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_4 con R_2 si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2k & 1-k & -1-2k \\ 0 & 0 & k+2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_2$, abbiamo

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2k-4 & 2-k & -2k \\ 0 & 0 & k+2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_4 \to 2R_4$ si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2k-4 & 2-k & -2k \\ 0 & 0 & 2k+4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e infine l'operazione $R_3 \to R_3 - R_4$, da la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 2-k & -2k \\ 0 & 0 & 2k+4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $k = -2$ il sistema ottenuto

$$\begin{cases} -X_1 + 2X_3 - X_4 = -2 \\ X_2 + 4X_3 - X_4 = -1 \\ -8X_3 + 4X_4 = 4 \end{cases}$$

è a gradini e quindi compatibile e per calcolare le soluzioni poniamo $X_4 = t$ e risolvendo otteniamo la soluzione

$$X_1 = 1,\ X_2 = 1 - t,\ X_3 = \frac{t-1}{2}, X_4 = t.$$

Se $k \neq -2$ proseguiamo dalla matrice B. Con l'operazione $R_4 \to \frac{1}{2k+4} R_4$, si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 2-k & -2k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_3 con R_4 si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 2-k & -2k \end{pmatrix}$$

e infine l'operazione $R_4 \to R_4 + 8R_3$, da la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-k & -2k \end{pmatrix}.$$

Se $k = 2$ si ha che $-2k = -4 \neq 0$, quindi il sistema è incompatibile. Invece se $k \neq 2$ il sistema è a gradini ed ha come unica soluzione

$$X_4 = \frac{2k}{k-2},\ X_3 = 0,\ X_2 = \frac{k+2}{k-2},\ X_1 = -\frac{4}{k-2}.$$

Si conclude che il sistema è compatibile se e solo se $k \neq 2$. ■

SOLUZIONE COME SCRITTO:

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti per poi applicare il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli. Sia

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -k & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det(A) = 4 - k^2 = 0$ se e solo se $k = \pm 2$. Pertanto, se $k \neq \pm 2$, abbiamo $r(A) = r(A\ b) = 4$ e il sistema è compatibile. Se $k = -2$ abbiamo

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

mentre se $k = 2$ abbiamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

da cui deduciamo che se $k = \pm 2$ allora $r(A) = 3$.

Ora, se $k = 2$ si ha

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -16$$

quindi $r(A\ b) = 4$ e il sistema è incompatibile.

Invece se $k = -2$ orliamo il minore

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

Si ottiene $\det(A)$, che è 0 e

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

quindi $r(A\ b) = 3 = r(A)$ ed il sistema è compatibile.

Pertanto il sistema è compatibile se e solo se $k \neq 2$ e le soluzioni sono date dalla regola di Cramer. Se $k \neq \pm 2$ abbiamo

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & k & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -k & 0 \end{vmatrix}}{4 - k^2} = -\frac{4}{k-2}, \quad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} k & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & k & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -k & 0 \end{vmatrix}}{4 - k^2} = \frac{k+2}{k-2},$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{4 - k^2} = 0, \quad X_4 = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & k & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -k & 1 \end{vmatrix}}{4 - k^2} = \frac{2k}{k-2}.$$

Invece se $k = -2$, usando il minore precedente

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4,$$

eliminando la seconda riga, ponendo $X_3 = u$ e portandolo a destra si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -2X_1 + X_2 + X_4 = -1 \\ -X_1 - X_4 = -2 - 2u \\ X_1 + X_2 = 1 - 2u \end{cases}$$

e abbiamo

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2-2u & 0 & -1 \\ 1-2u & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = 1, \;\; X_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2-2u & -1 \\ 1 & 1-2u & 0 \end{vmatrix}}{-4} = -2u,$$

$$X_3 = u, \;\; X_4 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2-2u \\ 1 & 1 & 1-2u \end{vmatrix}}{-4} = 2u + 1. \;\; \blacksquare$$

2. Siano k un numero reale, $v_k = (1, k, -1) \in \mathbb{R}^3$, $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X - Z = 0 \\ X + 2Y - Z = 0 \end{cases}$$

e $U_k \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale

$$U_k =< (2, 0, 1), (1, 1, 0), \; (1, -1, k) > .$$

(a) Determinare le dimensioni di U_k e $(W+ < v_k >)$ e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.

(b) Determinare le dimensioni di $U_k + (W+ < v_k >)$ e di $U_k \cap (W+ < v_k >)$;

(c) Determinare (se esistono) i valori di k per i quali

$$U_k \oplus W = \mathbb{R}^3.$$

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

SOLUZIONE COME RECUPERO DEL I ESONERO:

(a) Per calcolare la dimensione di U_k facciamo operazioni elementari sulla matrice dei generatori

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_2 si ha
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}.$$
Con le operazioni $R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - R_1$, si ottiene
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & k \end{pmatrix}$$
da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_2$, abbiamo la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}.$$
Pertanto $\dim U_k = r(A) = \begin{cases} 3 & \text{se} \quad k \neq 1 \\ 2 & \text{se} \quad k = 1 \end{cases}$ ed una sua base è (dividendo $(0,0,k-1)$ per $k-1$ quando $k \neq 1$)
$$\{(1,1,0),(0,-2,1),(0,0,1)\} \text{ se } k \neq 1$$
e
$$\{(1,1,0),(0,-2,1))\} \text{ se } k = 1.$$
Per calcolare la dimensione ed una base di W risolviamo il sistema facendo operazioni elementari sulla matrice del sistema
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Con l'operazione $R_2 \to R_2 - R_1$ si ha
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
da cui, posto $Z = t$, si trova $X = t, Y = 0$ e quindi un vettore di W è del tipo
$$(t,0,t) = t(1,0,1).$$
Se ne deduce che $\dim W = 1$ ed una sua base è $\{(1,0,1)\}$. Dato che la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & -1 \end{pmatrix}$$

ha chiaramente rango 2 si deduce che

$$\dim(W+<v_k>) = 2 \text{ e una sua base è } \{(1,0,1),(1,k,-1)\}.$$

(b) Consideriamo la matrice che ha per righe i generatori di U_k (ottenuti dalla matrice A) e $W+<v_k>$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & -1 \end{pmatrix}$$

e facciamo operazioni elementari. Scambiando R_3 con R_4 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 \\ 1 & k & -1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_1$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 \\ 1 & k & -1 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_2$ si ha la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & k-1 \\ 1 & k & -1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3 dato che le prime tre righe sono a gradini.
Quindi $\dim(U_k + (W+<v_k>)) = 3$ per ogni k e pertanto, per la formula di Grassmann,

$$\dim(U_k \cap (W+<v_k>)) = \dim U_k + \dim(W+<v_k>) - \dim(U_k + (W+<v_k>)) =$$

$$= \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 1 \\ 2 & \text{se } k = 1 \end{cases} + 2 - 3 = \begin{cases} 2 & \text{se } k \neq 1 \\ 1 & \text{se } k = 1 \end{cases}.$$

(c) Se $U_k \oplus W = \mathbb{R}^3$ si ha che $\dim U_k + \dim W = 3$ e pertanto $\dim U_k = 2$ e quindi $k = 1$.

Del resto se $k = 1$ la matrice dei generatori di U_1 e W è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che abbiamo visto avere rango 3 nel punto b), pertanto $U_1 \oplus W = \mathbb{R}^3$.
Si conclude che $U_k \oplus W = \mathbb{R}^3$ se e solo se $k = 1$. ■

SOLUZIONE COME SCRITTO:

(a) La dimensione di U_k è il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}.$$

Dato che

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = 2(k-1)$$

si ha che $\dim U_k = r(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } \; k \neq 1 \\ 2 & \text{se } \; k = 1 \end{cases}$ ed una sua base è

$$\{(2,0,1),(1,1,0),(1,-1,k)\} \text{ se } k \neq 1$$

e

$$\{(2,0,1),(1,1,0))\} \text{ se } k = 1.$$

Per calcolare la dimensione ed una base di W risolviamo il sistema.
Dato che $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ possiamo porre $Z = t$ e trovare $X = t, Y = 0$. Quindi un vettore di W è del tipo $(t,0,t) = t(1,0,1)$. Se ne deduce che $\dim W = 1$ ed una sua base è $\{(1,0,1)\}$. Dato che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & -1 \end{pmatrix}$$

ha chiaramente rango 2 si deduce che

$$\dim(W + < v_k >) = 2 \text{ e una sua base è } \{(1,0,1),(1,k,-1)\}.$$

(b) Consideriamo la matrice B che ha per righe i generatori di U_k e $W + < v_k >$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & -1 \end{pmatrix}.$$

Si ha
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$
e quindi $\dim(U_k + (W + < v_k >)) = r(B) = 3$ per ogni k e pertanto, per la formula di Grassmann,

$$\dim(U_k \cap (W+ < v_k >)) = \dim U_k + \dim(W+ < v_k >) - \dim(U_k + (W+ < v_k >)) =$$
$$= \begin{cases} 3 & \text{se} \quad k \neq 1 \\ 2 & \text{se} \quad k = 1 \end{cases} + 2 - 3 = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad k \neq 1 \\ 1 & \text{se} \quad k = 1 \end{cases}.$$

(c) Se $U_k \oplus W = \mathbb{R}^3$ si ha che $\dim U_k + \dim W = 3$ e pertanto $\dim U_k = 2$ e quindi $k = 1$. Del resto se $k = 1$ la matrice dei generatori di U_1 e W è
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
che abbiamo visto avere rango 3 nel punto b), pertanto $U_1 \oplus W = \mathbb{R}^3$.
Si conclude che $U_k \oplus W = \mathbb{R}^3$ se e solo se $k = 1$. ∎

3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia
$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & -1 \\ -k & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
(a) Utilizzando esclusivamente operazioni elementari, determinare i valori di k per i quali A è (o no) prodotto di matrici elementari e, in tal caso, esprimere A come tale prodotto.
(b) Sia
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}.$$
Per quali k esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B?

SOLUZIONE:

(a) Se $k = 0$ si vede subito che $r(A) = 2$ dunque A non è prodotto di matrici elementari. Se $k \neq 0$ facciamo operazioni elementari su A. Scambiando R_1 con R_2 si trova
$$\begin{pmatrix} -k & 0 & k \\ 0 & k & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

da cui, scambiando R_2 con R_3, si ha

$$\begin{pmatrix} -k & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & -1 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_3 \to R_3 - kR_2$ da

$$\begin{pmatrix} -k & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Allora $r(A) = 3$ e quindi A è prodotto di matrici elementari.

Pertanto A è prodotto di matrici elementari se e solo se $k \neq 0$.

Con l'operazione $R_1 \to -\frac{1}{k}R_1$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to -R_3$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_1 \to R_1 + R_3$ da I_3.

Dato che ogni operazione elementare equivale alla moltiplicazione a sinistra per la corrispondente matrice elementare, risalendo alle operazioni fatte, abbiamo allora che, se $k \neq 0$,

$$R_{13}(1)R_3(-1)R_1(-\frac{1}{k})R_{32}(-k)R_{23}R_{12}A = I_3$$

da cui

$$A = R_{12}^{-1}R_{23}^{-1}R_{32}(-k)^{-1}R_1(-\frac{1}{k})^{-1}R_3(-1)^{-1}R_{13}(1)^{-1}$$

e quindi

$$A = R_{12}R_{23}R_{32}(k)R_1(-k)R_3(-1)R_{13}(-1).$$

(b) Iniziamo calcolando il rango di B. L'operazione $R_3 \to R_3 - R_1$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 3 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - (k-1)R_2$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & -k^2+k+3 \end{pmatrix}.$$

Allora $r(B) = \begin{cases} 3 & \text{se} \quad k \neq \frac{1\pm\sqrt{13}}{2} \\ 2 & \text{se} \quad k = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2} \end{cases}$. Se $k \neq 0, \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ entrambe le matrici hanno rango 3, quindi prendendo una una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in I_3 ed una che trasforma I_3 in B (ottenuta invertendo una che trasforma B in I_3) si trova una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

Supponiamo ora $k = 0, \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$. Se esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B allora i sistemi $AX = 0$ e $BX = 0$, dove $X = {}^t(X_1, X_2, X_3)$ sono equivalenti. Ma se $k = 0$ il sistema $AX = 0$ ha per esempio la soluzione $(1, 0, 0)$ che non è soluzione di $BX = 0$. Se $k = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ allora $k \neq 0$ quindi il sistema $AX = 0$ ha come unica soluzione $(0, 0, 0)$ mentre il sistema $BX = 0$ ha ∞^1 soluzioni in quanto $r(B) = 2$. Pertanto i sistemi $AX = 0$ e $BX = 0$ non sono equivalenti nel caso $k = 0, \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

Si conclude che esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma$A$ in B se e solo se $k \neq 0, \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$. ■

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e sia F un endomorfismo di V tale che $e_1 \in N(F)$ e

$$F(e_2 + e_4) = e_2 - e_4, F(e_2 + e_3) = ke_1 + ke_2, F(e_1 - e_2) = e_3 + e_1.$$

(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che $e = \{e_1, e_2 + e_4, e_2 + e_3, e_1 - e_2\}$ è una base di V in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Per ipotesi sappiamo che $e_1 \in N(F)$, ovvero che

$$F(e_1) = 0 = 0e_1 + 0(e_2 + e_4) + 0(e_2 + e_3) + 0(e_1 - e_2).$$

Per determinare la matrice associata ad F nella base e, esprimiamo

$$F(e_2+e_4)=e_2-e_4, F(e_2+e_3)=ke_1+ke_2, F(e_1-e_2)=e_3+e_1$$

nella base e. Si ha

$$ae_1+b(e_2+e_4)+c(e_2+e_3)+d(e_1-e_2)=(a+d)e_1+(b+c-d)e_2+ce_3+be_4=e_2-e_4$$

se e solo se

$$\begin{cases} a+d=0 \\ b+c-d=1 \\ c=0 \\ b=-1 \end{cases}$$

che ha soluzione $a=2, b=-1, c=0, d=-2$, da cui

$$F(e_2+e_4)=2e_1-1(e_2+e_4)+0(e_2+e_3)-2(e_1-e_2).$$

Analogamente

$$ae_1+b(e_2+e_4)+c(e_2+e_3)+d(e_1-e_2)=(a+d)e_1+(b+c-d)e_2+ce_3+be_4=ke_1+ke_2$$

se e solo se

$$\begin{cases} a+d=k \\ b+c-d=k \\ c=0 \\ b=0 \end{cases}$$

che ha soluzione $a=2k, b=0, c=0, d=-k$. Pertanto

$$F(e_2+e_3)=2ke_1+0(e_2+e_4)+0(e_2+e_3)-k(e_1-e_2).$$

Inoltre

$$ae_1+b(e_2+e_4)+c(e_2+e_3)+d(e_1-e_2)=(a+d)e_1+(b+c-d)e_2+ce_3+be_4=e_3+e_1$$

se e solo se

$$\begin{cases} a+d=1 \\ b+c-d=0 \\ c=1 \\ b=0 \end{cases}$$

che ha soluzione $a=0, b=0, c=1, d=1$. Dunque

$$F(e_1-e_2)=0e_1+0(e_2+e_4)+1(e_2+e_3)+1(e_1-e_2).$$

Ne segue che

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2k & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -k & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora il polinomio caratteristico di F è (sviluppando prima per la prima colonna e poi per la seconda riga)

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} -T & 2 & 2k & 0 \\ 0 & -1-T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T & 1 \\ 0 & -2 & -k & 1-T \end{vmatrix} = T(T+1)(T^2 - T + k).$$

Le radici reali di $T(T+1)(T^2-T+k) = 0$ sono $0, -1$ e, se $k \leq \frac{1}{4}$, $\frac{1 \pm \sqrt{1-4k}}{2}$. Osserviamo che, per $k \leq \frac{1}{4}$, si ha $\frac{1 \pm \sqrt{1-4k}}{2} = 0$ se e solo se $k = 0$, mentre $\frac{1 \pm \sqrt{1-4k}}{2} = -1$ se e solo se $k = -2$.

Quindi gli autovalori di F sono

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k > \frac{1}{4}$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 1),$\lambda_2 = -1$ (m.a. 1)
$k = \frac{1}{4}$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_2 = -1$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ (m.a. 2)
$k = 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2), $\lambda_2 = -1$ (m.a. 1), $\lambda_3 = 1$ (m.a. 1),
$k = -2$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_2 = -1$ (m.a. 2), $\lambda_3 = 2(m.a.\ 1)$
$k < \frac{1}{4}, k \neq 0, -2$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_2 = -1$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \frac{1-\sqrt{1-4k}}{2}(m.a.\ 1)$, $\lambda_4 = \frac{1+\sqrt{1-4k}}{2}(m.a.\ 1)$

(b) Consideriamo il caso $k = -2$, $\lambda_2 = -1$. Calcoliamo la base di $V_{-1}(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore -1 sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z, w)$. Si ottiene

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ z + w = 0 \\ -2y + 2z + 2w = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $x = -4t, y = 0, z = -t, w = t, t \in \mathbb{R}$. Quindi gli autovettori di F associati all'autovalore -1 sono tutti del tipo $t(-4e_1 - (e_2 + e_3) + (e_1 - e_2)) = t(-3e_1 - 2e_2 - e_3)$ e una base di $V_{-1}(F)$ è $\{-3e_1 - 2e_2 - e_3\}$ e $\dim V_{-1}(F) = 1$.

(c) Osserviamo che, nel caso analizzato in (b), si ha $m.g.(-1) = 1 < 2 = m.a.(-1)$, mentre nel caso $k > \frac{1}{4}$ la somma delle molteplicità algebriche è minore di 4, quindi tale sarà anche la somma delle molteplicità geometriche. Dunque in tutti questi casi F non è diagonalizzabile. Nel caso $k = 0$ calcoliamo $m.g.(0)$. Come sappiamo

$$m.g.(0) = 4 - r(\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}) = 2$$

quindi la somma delle molteplicità geometriche è 4 e F è diagonalizzabile. Nel caso $k = \frac{1}{4}$ calcoliamo $m.g.(\frac{1}{2})$. Come sappiamo

$$m.g.(\frac{1}{2}) = 4 - r(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -2 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}) = 1 < 2 = m.a.(\frac{1}{2})$$

quindi F non è diagonalizzabile. Infine nel caso $k < \frac{1}{4}, k \neq 0, -2$ si ha che F ha quattro autovalori distinti, quindi è diagonalizzabile.
Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $k < \frac{1}{4}, k \neq -2$. ■

5. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 4 e sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine con coordinate X, Y, Z, W. Sia T_k il sottospazio di equazioni cartesiane

$$T_k : \begin{cases} X - Y + Z = 0 \\ X - Z = 1 \\ X - kY + Z + W = k \end{cases}$$

e sia S_k il sottospazio di equazioni parametriche

$$S_k : \begin{cases} X = t + s \\ Y = 1 + t - s \\ Z = kt \\ W = 1 - s \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare per quali valori di k si ha che T_k è un sottospazio e calcolare le dimensioni di T_k e S_k.
(b) Determinare per quali valori di k (se esistono) si ha che S_k è parallelo a T_k.
(c) Determinare (se esistono) tutte le rette r di $\mathbf{A}$ tale che r è parallela a T_k ed è sghemba con S_k.

SOLUZIONE:

(a) Intanto osserviamo che S_k è il sottospazio (di dimensione 2) che passa per il punto $Q = Q(0, 1, 0, 1)$ ed ha giacitura giac$(S_k) =< e_1 + e_2 + ke_3, e_1 - e_2 - e_4 >$.
La matrice completa del sistema che definisce T_k è

$$(A\ b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -k & 1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -k & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

e quindi $r(A) = r(A\ b) = 3$ e il sistema è compatibile per ogni k. Deduciamo che T_k è un sottospazio per ogni k e $\dim T_k = 4 - r(A) = 1$.

(b) Calcoliamo la giacitura di T_k risolvendo il sistema omogeneo associato a T_k:

$$\begin{cases} X - Y + Z = 0 \\ X - Z = 0 \\ X - kY + Z + W = 0 \end{cases}.$$

Dato che

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -k & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

possiamo porre $Z = t$ e quindi dedurre facilmente che $X = t, Y = 2t, W = 2(k-1)t$. Dunque giac$(T_k) =< e_1 + 2e_2 + e_3 + 2(k-1)e_4 >$. Abbiamo allora che, essendo $\dim T_k = 1$ e $\dim S_k = 2$, S_k è parallelo a T_k se e solo se il rango della matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2(k-1) \end{pmatrix}$$

è 2. Ma

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3k - 2, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2(k-1) \end{vmatrix} = 5 - 4k$$

che si vede subito non sono mai entrambi nulli. Dunque $r(C) = 3$ per ogni k e se ne conclude che non esistono valori di k per cui S_k è parallelo a T_k.

(c) Scelto un punto $R = R(a, b, c, d)$, una retta r passante per R e parallela a T_k avrà equazioni parametriche

$$\begin{cases} X = a + u \\ Y = b + 2u \\ Z = c + u \\ W = d + 2(k-1)u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}.$$

Per la (b) sappiamo che r non è parallela a S_k, dunque è sghemba con S_k se e solo se $r \cap S_k = \emptyset$. Per verificare questo calcoliamo le equazioni cartesiane di S_k. Un punto $P = P(X, Y, Z, W)$ appartiene a S_k se e solo se $\vec{QP} \in < e_1 + e_2 + ke_3, e_1 - e_2 - e_4 >$, se e solo se la matrice

$$D = \begin{pmatrix} X & Y-1 & Z & W-1 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango due. Per il principio dei minori orlati, osservando che $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ si ha che $r(D) = 2$ se e solo se

$$\begin{vmatrix} X & Y-1 & Z \\ 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} X & Y-1 & W-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dunque le equazioni cartesiane di S_k sono

$$S_k : \begin{cases} kX + kY - 2Z = k \\ X - Y - 2W = -3 \end{cases}.$$

Allora $r \cap S_k = \emptyset$ se e solo se il seguente sistema

$$\begin{cases} k(a+u) + k(b+2u) - 2(c+u) = k \\ (a+u) - (b+2u) - 2d - 4(k-1)u = -3 \end{cases}$$

non ha soluzioni in u. Si ottiene

$$\begin{cases} (3k-2)u = k - ka - kb + 2c \\ (3-4k)u = -a + b + 2d - 3 \end{cases}$$

e quindi la condizione è che (a, b, c, d) deve soddisfare

$$(3k-2)(-a+b+2d-3) \neq (3-4k)(k-ka-kb+2c). \quad \blacksquare$$

6. Siano U, V e W tre spazi vettoriali reali e siano $G : U \to V,\ F : V \to W$ due applicazioni lineari non nulle.

(a) Dimostrare che se $F \circ G$ è iniettiva allora G è iniettiva.

(b) È possibile che G è iniettiva ma $F \circ G$ non è iniettiva?

(c) Costruire un esempio esplicito in cui $F \circ G$ è iniettiva e $N(F) \oplus \mathrm{Im}G = V$.

SOLUZIONE:

(a) Sia $u \in N(G)$, allora $G(u) = 0$ quindi anche $F(G(u)) = 0$, ma allora $u \in N(F \circ G)$. Essendo $F \circ G$ iniettiva ne segue che $N(F \circ G) = \{0\}$, da cui $u = 0$. Ma allora $N(G) = \{0\}$ e quindi G è iniettiva.

(b) Sia $U = V = W = \mathbb{R}^2$ e $G = \mathrm{Id}_V$, F tale che $F(E_1) = 0, F(E_2) = E_2$. Allora G è iniettiva ma $(F \circ G)(E_1) = 0$, quindi $F \circ G$ non è iniettiva.

(c) Sia $U = \mathbb{R}, V = W = \mathbb{R}^2$, G tale che $G(E_1) = E_2$ ed F tale che $F(E_1) = 0, F(E_2) = E_2$. Allora $\mathrm{Im}G =< E_2 >, N(F) =< E_1 >$ e quindi $N(F) \oplus \mathrm{Im}G = V$. Del resto se $u \in N(F \circ G)$ allora $u = aE_1$ per qualche $a \in \mathbb{R}$ e quindi

$$0 = (F \circ G)(u) = F(G(aE_1)) = F(aE_2) = aE_2$$

quindi $a = 0$, da cui deduciamo che $u = 0$ e pertanto $F \circ G$ è iniettiva. $\blacksquare$