UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2017-2018

Prova scritta del 18-6-2018

TESTO

Avvertenze:

A. Per il recupero del primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3;

B. Per il recupero del secondo esonero svolgere gli esercizi 4,5,6;

C. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 + X_2 + X_4 = -1 \\ X_1 + kX_3 + X_4 = 2 \\ -X_1 + 2X_3 - X_4 = -2 \\ X_1 + X_2 - kX_3 = 1 \end{cases}.$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

2. Siano k un numero reale, $v_k = (1, k, -1) \in \mathbb{R}^3$, $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X - Z = 0 \\ X + 2Y - Z = 0 \end{cases}$$

e $U_k \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale

$$U_k =< (2,0,1), (1,1,0),\ (1,-1,k) > .$$

(a) Determinare le dimensioni di U_k e $(W+ < v_k >)$ e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.

(b) Determinare le dimensioni di $U_k + (W+ < v_k >)$ e di $U_k \cap (W+ < v_k >)$;

(c) Determinare (se esistono) i valori di k per i quali

$$U_k \oplus W = \mathbb{R}^3.$$

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & -1 \\ -k & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Utilizzando esclusivamente operazioni elementari, determinare i valori di k per i quali A è (o no) prodotto di matrici elementari e, in tal caso, esprimere A come tale prodotto.

(b) Sia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}.$$

Per quali k esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B?

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e sia F un endomorfismo di V tale che $e_1 \in N(F)$ e

$$F(e_2 + e_4) = e_2 - e_4, F(e_2 + e_3) = ke_1 + ke_2, F(e_1 - e_2) = e_3 + e_1.$$

(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

5. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 4 e sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine con coordinate X, Y, Z, W. Sia T_k il sottospazio di equazioni cartesiane

$$T_k : \begin{cases} X - Y + Z = 0 \\ X - Z = 1 \\ X - kY + Z + W = k \end{cases}$$

e sia S_k il sottospazio di equazioni parametriche

$$S_k : \begin{cases} X = t + s \\ Y = 1 + t - s \\ Z = kt \\ W = 1 - s \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare per quali valori di k si ha che T_k è un sottospazio e calcolare le dimensioni di T_k e S_k.

(b) Determinare per quali valori di k (se esistono) si ha che S_k è parallelo a T_k.

(c) Determinare (se esistono) tutte le rette r di $\mathbf{A}$ tale che r è parallela a T_k ed è sghemba con S_k.

6. Siano U, V e W tre spazi vettoriali reali e siano $G : U \to V,\ F : V \to W$ due applicazioni lineari non nulle.

(a) Dimostrare che se $F \circ G$ è iniettiva allora G è iniettiva.

(b) È possibile che G è iniettiva ma $F \circ G$ non è iniettiva?

(c) Costruire un esempio esplicito in cui $F \circ G$ è iniettiva e $N(F) \oplus \mathrm{Im}G = V$.