UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2017-2018

Prova scritta del 29-1-2019

TESTO E SOLUZIONI

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Determinare per quali valori $k \in \mathbb{R}$ è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2X_1 + (k-1)X_2 + X_4 = 1 \\ X_1 + X_2 + kX_4 = 0 \\ X_1 - kX_3 + X_4 = 0 \\ X_1 + (2k-1)X_2 + kX_3 + X_4 = 2 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti A e della matrice orlata $(A\ b)$ per poi applicare il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli. Si ha

$$(A\ b) = \begin{pmatrix} 2 & k-1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & -k & 1 & 0 \\ 1 & 2k-1 & k & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si ha $\det A = k(2k^2-3)$, quindi $\det A = 0$ se e solo se $k = 0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Consideriamo il seguente minore di $(A\ b)$:

$$m = \begin{vmatrix} 2 & k-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2k-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3-k.$$

Se $k \neq 0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ si ha $r(A) = r(A\ b) = 4$ e il sistema è compatibile. Invece se $k = 0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ si ha $r(A) \leq 3$ mentre $m \neq 0$, quindi $r(A\ b) = 4$.

Pertanto il sistema è compatibile se e solo se $k \neq 0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Per calcolare le soluzioni nel caso $k \neq 0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, applichiamo la regola di Cramer:

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & -k & 1 \\ 2 & 2k-1 & k & 1 \end{vmatrix}}{k(2k^2-3)} = \frac{k}{2k^2-3}, \quad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & k \\ 1 & 0 & -k & 1 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{vmatrix}}{k(2k^2-3)} = \frac{2k}{2k^2-3},$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & k-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2k-1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{k(2k^2-3)} = \frac{k-3}{k(2k^2-3)}, X_4 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & k-1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -k & 0 \\ 1 & 2k-1 & k & 2 \end{vmatrix}}{k(2k^2-3)} = -\frac{3}{2k^2-3}. \blacksquare$$

2. Siano k un numero reale, sia $W_k \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X - Y = 0 \\ Y + kW = 0 \end{cases}$$

e sia $U_k \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X + kY + Z = 0 \\ Y - W = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare una base di U_k e una di W_k;

(b) Determinare le dimensioni di $U_k + W_k$ e di $U_k \cap W_k$;

(c) Sia $v = (0, 1, 1, 1)$. Determinare (se esistono) tutti i valori di k per i quali

$$U_k \oplus \langle W_k, v\rangle = \mathbb{R}^4.$$

SOLUZIONE:

(a) Il rango della matrice delle equazioni di W_k

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \end{pmatrix}$$

è 2 e il minore $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ e quindi possiamo porre $Z = u, W = v$ e ottenere $X = -kv, Y = -kv$. Allora i vettori di W_k sono tutti del tipo

$$(-kv, -kv, u, v) = u(0, 0, 1, 0) + v(-k, -k, 0, 1)$$

pertanto una base di W_k è $\{(0, 0, 1, 0), (-k, -k, 0, 1)\}$ e $\dim W_k = 2$ per ogni k.

Il rango della matrice delle equazioni di U_k

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è 2 e il minore $\begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ e quindi possiamo porre $Z = s, W = t$ e ottenere $X = -s - kt, Y = t$. Allora i vettori di U_k sono tutti del tipo

$$(-s - kt, t, s, t) = s(-1, 0, 1, 0) + t(-k, 1, 0, 1)$$

pertanto una base di U_k è $\{(-1, 0, 1, 0), (-k, 1, 0, 1)\}$ e $\dim U_k = 2$ per ogni k.
(b) Consideriamo la matrice che ha per righe i generatori di U_k e W_k, cioè

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -k & 1 & 0 & 1 \\ -k & -k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det A = k + 1 = 0$ se e solo se $k = -1$. Ora, se $k = -1$ il minore

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

pertanto $\dim(U_k + W_k) = r(A) = \begin{cases} 4 & \text{se } k \neq -1 \\ 3 & \text{se } k = -1 \end{cases}$. Con la formula di Grassmann si trova

$$\dim(U_k \cap W_k) = \dim U_k + \dim W_k - \dim(U_k + W_k) =$$

$$= 2 + 2 - \begin{cases} 4 & \text{se } k \neq -1 \\ 3 & \text{se } k = -1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq -1 \\ 1 & \text{se } k = -1 \end{cases}.$$

(c) Si vede subito che $v \notin W_k$ dato che le coordinate di v non soddisfano le equazioni di W_k. Allora $\dim\langle W_k, v\rangle = 3$ e quindi non esistono valori di k per i quali $U_k \oplus \langle W_k, v\rangle = \mathbb{R}^4$.

■

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 4 e sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine con coordinate X, Y, Z, W. Sia T_k il sottospazio di equazioni cartesiane

$$T_k : \begin{cases} X - Y = 0 \\ X - kZ = 1 \\ X - kY + W = 0 \end{cases}$$

e sia S il sottospazio di equazioni parametriche

$$S : \begin{cases} X = t - s \\ Y = 1 + t + s \\ Z = kt \\ W = -s \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare per quali valori di k si ha che T_k è un sottospazio e calcolare le dimensioni di T_k e S.
(b) Determinare per quali valori di k (se esistono) si ha che S è parallelo a T_k.
(c) Determinare (se esistono) tutte i piani p di $\mathbf{A}$ tale che p è parallelo a T_k ed è sghembo con S.

SOLUZIONE:

(a) Dalle equazioni parametriche si deduce che S è il piano passante per il punto $Q = Q(0,1,0,0)$ e di giacitura $< e_1 + e_2 + ke_3, -e_1 + e_2 - e_4 >$.
La matrice del sistema di T_k è

$$(A\ b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -k & 0 & -1 \\ 1 & -k & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -k & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ si ha che $r(A) = r(A\ b)) = 3$ e quindi T_k è un sottospazio di dimensione 1 per ogni k.
(b) La giacitura di T_k è data dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} X - Y = 0 \\ X - kZ = 0 \\ X - kY + W = 0 \end{cases}$$

che si vede subito avere soluzioni $(kt, kt, t, (k^2 - k)t, t \in \mathbb{R}$. Dunque

$$\text{giac}(T_k) =< ke_1 + ke_2 + e_3 + (k^2 - k)e_4 > .$$

Quindi S è parallelo a T_k se e solo se la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ k & k & 1 & k^2 - k \end{pmatrix}$$

ha rango 2. Dato che $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ per il principio dei minori orlati si ha che $r(B) = 2$ se e solo se

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ -1 & 1 & 0 \\ k & k & 1 \end{vmatrix} = 2(1 - k^2) = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ k & k & k^2 - k \end{vmatrix} = 2k(k - 1) = 0$$

ovvero se e solo se $k = 1$. Dunque S è parallelo a T_k se e solo se $k = 1$.

(c) Un piano p parallelo a T_k deve contenerne la sua giacitura, quindi la giacitura di p sarà

$$\langle \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4, ke_1 + ke_2 + e_3 + (k^2-k)e_4 \rangle$$

per $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tali che

$$r(\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ k & k & 1 & k^2-k \end{pmatrix}) = 2.$$

Allora per trovare p parallelo a T_k e sghembo con S basterà scegliere un punto $R = R(a,b,c,d) \in A$ tali che $p \cap S = \emptyset$ e, se $k=1$, p non è parallelo ad S. La seconda condizione è

$$r(\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}) > 2.$$

Per verificare la prima condizione troviamo le equazioni cartesiane di S. Eliminando i parametri dalle equazioni parametriche si trova

$$\begin{cases} s = -W \\ t = X - W \\ Z = k(X-W) \\ Y = 1 + X - 2W \end{cases}$$

dunque le equazioni cartesiane di S sono

$$\begin{cases} k(X-W) - Z = 0 \\ X - Y - 2W - 1 = 0 \end{cases}.$$

Ora un punto di p ha coordinate

$$\begin{cases} X = a + ku + \alpha v \\ Y = b + ku + \beta v \\ Z = c + u + \gamma v \\ W = d + (k^2-k)u + \delta v \end{cases}, u, v \in \mathbb{R}$$

e quindi $p \cap S = \emptyset$ se e solo se il sistema

$$\begin{cases} k(a+ku+\alpha v) - (c+u+\gamma v) - k(d+(k^2-k)u+\delta v) = 0 \\ (a+ku+\alpha v) - (b+ku+\beta v) - 2(d+(k^2-k)u+\delta v) + 1 = 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni in u e v. Riscrivendolo si ottiene

$$\begin{cases} (-k^3+2k^2-1)u + (k\alpha - \gamma - k\delta)v + ka - c - kd = 0 \\ (-2k^2+2k)u + (\alpha - \beta - 2\delta)v + a - b - 2d + 1 = 0 \end{cases}$$

e quindi la condizione è

$$r(\begin{pmatrix} -k^3+2k^2-1 & k\alpha - \gamma - k\delta \\ -2k^2+2k & \alpha - \beta - 2\delta \end{pmatrix}) \neq$$

$$\neq r(\begin{pmatrix} -k^3+2k^2-1 & k\alpha-\gamma-k\delta & ka-c-kd \\ -2k^2+2k & \alpha-\beta-2\delta & a-b-2d+1 \end{pmatrix}). \quad \blacksquare$$

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Siano $v_1 = (1,0,-1,0), v_2 = (0,0,0,-1) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$v_1, v_2 \in N(F), F(E_1) = -kE_2 - E_3, F(E_2+E_3) = kE_2 + (1+k)E_3 - kE_4$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che $e = \{v_1, v_2, E_1, E_2+E_3\}$ è una base di V in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Per ipotesi sappiamo che

$$F(v_1) = F(v_2) = 0.$$

Per determinare la matrice associata ad F nella base e, esprimiamo

$$F(E_1) = -kE_2 - E_3, F(E_2+E_3) = kE_2 + (1+k)E_3 - kE_4$$

nella base e. Si ha

$$av_1 + bv_2 + cE_1 + d(E_2+E_3) = (a+c, d, d-a, -b) = (0, -k, -1, 0)$$

se e solo se

$$\begin{cases} a+c=0 \\ d=-k \\ d-a=-1 \\ -b=0 \end{cases}$$

che ha soluzione $a = 1-k, b = 0, c = k-1, d = -k$. Pertanto

$$F(E_1) = (1-k)v_1 + 0v_2 + (k-1)E_1 - k(E_2+E_3).$$

Analogamente

$$av_1 + bv_2 + cE_1 + d(E_2 + E_3) = (a + c, d, d - a, -b) = (0, k, 1 + k, -k)$$

se e solo se

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ d = k \\ d - a = 1 + k \\ -b = -k \end{cases}$$

che ha soluzione $a = -1, b = k, c = 1, d = k$. Pertanto

$$F(E_2 + E_3) = -v_1 + kv_2 + E_1 + k(E_2 + E_3).$$

Ne segue che

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-k & -1 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & -k & k \end{pmatrix}.$$

Allora il polinomio caratteristico di F è (sviluppando con la formula di Laplace)

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} -T & 0 & 1-k & -1 \\ 0 & -T & 0 & k \\ 0 & 0 & k-1-T & 1 \\ 0 & 0 & -k & k-T \end{vmatrix} = T^2(T^2 + (1-2k)T + k^2).$$

Le radici reali di $T^2(T^2 + (1-2k)T + k^2) = 0$ sono 0 (con molteplicità algebrica almeno 2) e, se $k \leq \frac{1}{4}$, $\frac{2k-1\pm\sqrt{1-4k}}{2}$. Osserviamo che $\frac{2k-1\pm\sqrt{1-4k}}{2} = 0$ se e solo se $k = 0$.
Quindi gli autovalori di F sono

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k < \frac{1}{4}, k \neq 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2), $\lambda_2 = \frac{2k-1-\sqrt{1-4k}}{2}$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \frac{2k-1+\sqrt{1-4k}}{2}$ (m.a. 1)
$k = 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 3), $\lambda_2 = -1$ (m.a. 1)
$k = \frac{1}{4}$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2), $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$ (m.a. 2)
$k > \frac{1}{4}$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2)

(b) Prendiamo $\lambda_1 = 0$ come autovalore da considerare e calcoliamo la base di $V_0(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore 0 sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - 0I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z, w)$. Si ottiene

$$\begin{cases} (1-k)z - w = 0 \\ kw = 0 \\ (k-1)z + w = 0 \\ -kz + kw = 0 \end{cases}$$

da cui:
- se $k = 0$ ha soluzioni (x, y, z, z) e quindi gli autovettori di F associati all'autovalore 0 sono tutti del tipo $xv_1 + yv_2 + zE_1 + z(E_2 + E_3)$ e una base di $V_0(F)$ è $\{v_1, v_2, E_1 + E_2 + E_3\}$ e $\dim V_0(F) = 3$;
- se $k \neq 0$ ha soluzioni $(x, y, 0, 0)$ e quindi gli autovettori di F associati all'autovalore 0 sono tutti del tipo $xv_1 + yv_2$ e una base di $V_0(F)$ è $\{v_1, v_2\}$ e $\dim V_0(F) = 2$.
(c) Osserviamo che se $k < \frac{1}{4}$ la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori è 4, mentre se $k > \frac{1}{4}$ la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori è 2. Se $k = \frac{1}{4}$ calcoliamo

$$m.g.(-\frac{1}{4}) = 4 - r(\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}) = 1$$

e la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori è 3.
Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $k < \frac{1}{4}$. ■