UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2017-2018

Prova scritta del 29-1-2019

TESTO

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Determinare per quali valori $k \in \mathbb{R}$ è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2X_1 + (k-1)X_2 + X_4 = 1 \\ X_1 + X_2 + kX_4 = 0 \\ X_1 - kX_3 + X_4 = 0 \\ X_1 + (2k-1)X_2 + kX_3 + X_4 = 2 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni.

2. Siano k un numero reale, sia $W_k \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X - Y = 0 \\ Y + kW = 0 \end{cases}$$

e sia $U_k \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X + kY + Z = 0 \\ Y - W = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare una base di U_k e una di W_k;

(b) Determinare le dimensioni di $U_k + W_k$ e di $U_k \cap W_k$;

(c) Sia $v = (0, 1, 1, 1)$. Determinare (se esistono) tutti i valori di k per i quali

$$U_k \oplus \langle W_k, v \rangle = \mathbb{R}^4.$$

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 4 e sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine con coordinate X, Y, Z, W. Sia T_k il sottospazio di equazioni cartesiane

$$T_k : \begin{cases} X - Y = 0 \\ X - kZ = 1 \\ X - kY + W = 0 \end{cases}$$

e sia S il sottospazio di equazioni parametriche

$$S : \begin{cases} X = t - s \\ Y = 1 + t + s \\ Z = kt \\ W = -s \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare per quali valori di k si ha che T_k è un sottospazio e calcolare le dimensioni di T_k e S.

(b) Determinare per quali valori di k (se esistono) si ha che S è parallelo a T_k.

(c) Determinare (se esistono) tutte i piani p di $\mathbf{A}$ tale che p è parallelo a T_k ed è sghembo con S.

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Siano $v_1 = (1, 0, -1, 0), v_2 = (0, 0, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$v_1, v_2 \in N(F), F(E_1) = -kE_2 - E_3, F(E_2 + E_3) = kE_2 + (1 + k)E_3 - kE_4$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.