UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2017-2018

Prima prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Determinare, utilizzando esclusivamente operazioni elementari, per quali valori $k \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 - X_2 + X_4 = 1 \\ 5X_1 - kX_3 - X_4 = 3 \\ 2X_1 - X_2 + kX_4 = 0 \\ X_1 + X_2 - kX_3 = 1 \end{cases}.$$

e, quando è compatibile, calcolare esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} k & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -k & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & k & 0 \\ 1 & 1 & -k & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_4 si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -k & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -k & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & k & 0 \\ k & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui con le operazioni $R_2 \to R_2 - 5R_1, R_3 \to R_3 - 2R_1, R_4 \to R_4 - kR_1$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -k & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 4k & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 2k & k & -2 \\ 0 & -1-k & k^2 & 1 & 1-k \end{pmatrix}$$

e con le operazioni $R_3 \to R_3 - \frac{3}{5}R_2, R_4 \to R_4 - \frac{1+k}{5}R_2$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -k & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 4k & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{2k}{5} & \frac{5k+3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{k^2-4k}{5} & \frac{6+k}{5} & \frac{7-3k}{5} \end{pmatrix}$$

da cui le operazioni $R_3 \to 5R_3, R_4 \to 5R_4$ danno

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -k & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 4k & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2k & 5k+3 & -4 \\ 0 & 0 & k^2-4k & 6+k & 7-3k \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_4 \to R_4 + \frac{k-4}{2} R_3$ si trova la matrice

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -k & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 4k & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2k & 5k+3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5k(k-3)}{2} & -5(k-3) \end{pmatrix}.$$

Se $k = 0$ si ha

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

ed il sistema è pertanto incompatibile.

Supponiamo da ora in poi $k \neq 0$. Osserviamo intanto che la matrice B_k è comunque a gradini, sia se $k = 3$, caso in cui $r(B_3) = 3$ che se $k \neq 3$, caso in cui $r(B_k) = 4$.

Se $k \neq 3$ ha come soluzioni (dopo un pò di calcoli):

$$X_4 = -\frac{2}{k},\ X_3 = -\frac{3k+3}{k^2},\ X_2 = -\frac{2k+2}{k},\ X_1 = -\frac{1}{k}.$$

Se invece $k = 3$ posto $X_4 = t$ si trova risolvendo

$$X_4 = t,\ X_3 = \frac{9t+2}{3},\ X_2 = 7t+2,\ X_1 = 2t+1. \blacksquare$$

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Usando solo operazioni elementari, determinare i valori di k per i quali A è (o no) invertibile.

(b) Sia

$$B = \begin{pmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare i valori di k (se esistono) per i quali esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

SOLUZIONE:

(a) Applichiamo operazioni elementari ad A. Con l'operazione $R_2 \to R_2 - R_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_2 con R_3 si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & k & -3 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_3 \to R_3 - kR_2$ abbiamo la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3-k \end{pmatrix}.$$

Deduciamo che $r(A) = r(C) = \begin{cases} 3 & \text{if } k \neq -3 \\ 2 & \text{if } k = -3 \end{cases}$ e quindi che A è invertibile se e solo se $k \neq -3$.

(b) Notiamo che B è a gradini se $k \neq -3$, mentre ha una riga e colonna nulla se $k = -3$, da cui $r(B) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$. Quindi $r(B) = \begin{cases} 3 & \text{if } k \neq -3 \\ 2 & \text{if } k = -3 \end{cases}$. Ora, se $k \neq -3$, essendo A invertibile, esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma I_3 in A e quindi, invertendo tali operazioni, esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in I_3. Inoltre, essendo B invertibile, esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma I_3 in B. Pertanto, se $k \neq -3$, facendo le due sequenze dette una dopo l'altra, si trova una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

Invece se $k = -3$ facciamo vedere che una tale sequenza non esiste. Infatti se esistesse allora i sistemi omogenei $AX = 0$ e $BX = 0$, dove $X = {}^t(\, X_1 \quad X_2 \quad X_3 \,)$, sarebbero equivalenti. Ma il sistema $BX = 0$ ha per esempio la soluzione $(1, 0, 0)$ che chiaramente non è soluzione di $AX = 0$. Ne segue che se $k = -3$ una tale sequenza non esiste.

Si conclude che esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B se e solo se $k \neq -3$. ■

3. Siano k un numero reale e siano

$$v_1 = (0, 1, -1, 0), v_2 = (1, 1, 0, 0), v_3 = (-1, 1, -2, k) \in \mathbb{R}^4.$$

Sia $U_k =< v_1, v_2, v_3 >$ e sia $W_k \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X - Y + Z = 0 \\ kX - kZ = 0 \\ X + kW = 0 \end{cases}$$

dove X, Y, Z, W sono coordinate in $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare le dimensioni di U_k e di W_k e scrivere esplicitamente una base di U_k ed una di W_k.

(b) Determinare le dimensioni di $U_k + W_k$ e di $U_k \cap W_k$.

(c) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ esiste una base di U_k ed una di W_k che abbiano almeno un vettore in comune.

SOLUZIONE:

(a) Per calcolare la dimensione di U_k consideriamo la matrice dei suoi generatori

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & k \end{pmatrix}$$

e facciamo operazioni elementari. Scambiando R_1 con R_2 si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & k \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 + R_1$, si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & k \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_3 \to R_3 - 2R_2$ da la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Si vede subito che $\dim(U_k) = r(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 3 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$. Inoltre, sempre da A, dividendo l'ultima riga per k se $k \neq 0$, deduciamo che una base di U_k è $\{v_1, v_2\}$ se $k = 0$ e $\{v_1, v_2, E_4\}$ se $k \neq 0$.

Per calcolare la dimensione ed una base di W_k risolviamo invece il suo sistema facendo operazioni elementari su

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ k & 0 & -k & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Con le operazioni $R_2 \to R_2 - kR_1, R_3 \to R_3 - R_1$, si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & k & -2k & 0 \\ 0 & 1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_2 con R_3 si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & k \\ 0 & k & -2k & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - kR_2$, si ottiene la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & k \\ 0 & 0 & -k & -k^2 \end{pmatrix}$$

che, notiamo, in ogni caso è a gradini.

Se $k = 0$ ponendo, nel sistema omogeneo associato a B, $W = t, Z = u$ (t ed u sono parametri arbitrari) si ha la soluzione $W = t, Z = u, Y = u, X = 0$, quindi ogni vettore di W_k è del tipo

$$(0, u, u, t) = u(E_2 + E_3) + tE_4$$

e, essendo $E_2 + E_3$ e E_4 linearmente indipendenti, una base di W_0 è $\{E_2 + E_3, E_4\}$ e $\dim W_0 = 2$.

Invece se $k \neq 0$ ponendo, nel sistema omogeneo associato a B, $W = t$ (t è un parametro arbitrario) si ha la soluzione $W = t, Z = -kt, Y = -2kt, X = -kt$, quindi ogni vettore di W_k è del tipo

$$(-kt, -2kt, -kt, t) = t(-kE_1 - 2kE_2 - kE_3 + E_4)$$

e, essendo $-kE_1 - 2kE_2 - kE_3 + E_4$ linearmente indipendente, una base di W_k è, se $k \neq 0$, $\{-kE_1 - 2kE_2 - kE_3 + E_4\}$ e $\dim W_k = 1$.

(b) Per calcolare la dimensione di $W_k + U_k$, utilizziamo le basi di U_k e W_k trovate in (a).

Se $k = 0$ abbiamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

che, con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_2$ diventa

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deduciamo che $\dim(U_0 + W_0) = r(C) = 4$ e la formula di Grassmann da

$$\dim(U_0 \cap W_0) = \dim U_0 + \dim W_0 - \dim(U_0 + W_0) = 2 + 2 - 4 = 0.$$

Se $k \neq 0$ facciamo operazioni elementari sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k & -2k & -k & 1 \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_4 \to R_4 + kR_1$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k & -k & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \to R_4 + kR_2$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2k & 1 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_3 con R_4 otteniamo la matrice a gradini

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, se $k \neq 0$, $\dim(U_k + W_k) = r(D) = 4$ e la formula di Grassmann da

$$\dim(U_k \cap W_k) = \dim U_k + \dim W_k - \dim(U_k + W_k) = 3 + 1 - 4 = 0.$$

(c) Se esistesse una base di U_k ed una di W_k che abbiano almeno un vettore v in comune allora, essendo v parte di una base, deve essere $v \neq 0$. Ma $v \in U_k \cap W_k$ e abbiamo visto in b) che $U_k \cap W_k = \{0\}$. Quindi tale v non esiste per nessun k. ■