

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2017-2018

Prima prova di esonero

TESTO

1. Determinare, utilizzando esclusivamente operazioni elementari, per quali valori $k \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 - X_2 + X_4 = 1 \\ 5X_1 - kX_3 - X_4 = 3 \\ 2X_1 - X_2 + kX_4 = 0 \\ X_1 + X_2 - kX_3 = 1 \end{cases}.$$

e, quando è compatibile, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Usando solo operazioni elementari, determinare i valori di k per i quali A è (o no) invertibile.

(b) Sia

$$B = \begin{pmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare i valori di k (se esistono) per i quali esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B .

3. Siano k un numero reale e siano

$$v_1 = (0, 1, -1, 0), v_2 = (1, 1, 0, 0), v_3 = (-1, 1, -2, k) \in \mathbb{R}^4.$$

Sia $U_k = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e sia $W_k \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X - Y + Z = 0 \\ kX - kZ = 0 \\ X + kW = 0 \end{cases}$$

dove X, Y, Z, W sono coordinate in \mathbb{R}^4 .

- (a) Determinare le dimensioni di U_k e di W_k e scrivere esplicitamente una base di U_k ed una di W_k .
- (b) Determinare le dimensioni di $U_k + W_k$ e di $U_k \cap W_k$.
- (c) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ esiste una base di U_k ed una di W_k che abbiano almeno un vettore in comune.