

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2017-2018

Seconda prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e siano $v_1 = e_1 + e_2, v_2 = e_2 + e_3$. Sia F un endomorfismo di V tale che $v_1, v_2 \in V_1(F)$ e

$$F(e_3) = e_2 + e_3 + e_4, F(e_4) = ke_1 + (k+1)e_2 + (k+1)e_3.$$

- (a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F .
- (b) Scelto un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ .
- (c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che $e = \{v_1, v_2, e_3, e_4\}$ è una base di V in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Per determinare la matrice associata ad F osserviamo intanto che, per ipotesi, v_1 e v_2 sono autovettori di F con autovalore 1, quindi

$$F(v_1) = v_1, F(v_2) = v_2.$$

Ora esprimiamo $F(e_3) = e_2 + e_3 + e_4$ e $F(e_4) = ke_1 + (k+1)e_2 + (k+1)e_3$ nella base e . Si ha

$$av_1 + bv_2 + ce_3 + de_4 = ae_1 + (a+b)e_2 + (b+c)e_3 + de_4 = e_2 + e_3 + e_4$$

se e solo se

$$\begin{cases} a = 0 \\ a + b = 1 \\ b + c = 1 \\ d = 1 \end{cases}$$

che ha soluzione $a = 0, b = 1, c = 0, d = 1$. Pertanto

$$F(e_3) = 0v_1 + 1v_2 + 0e_3 + 1e_4.$$

Inoltre

$$av_1 + bv_2 + ce_3 + de_4 = ae_1 + (a+b)e_2 + (b+c)e_3 + de_4 = ke_1 + (k+1)e_2 + (k+1)e_3$$

se e solo se

$$\begin{cases} a = k \\ a + b = k + 1 \\ b + c = k + 1 \\ d = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $a = k, b = 1, c = k, d = 0$. Pertanto

$$F(e_4) = kv_1 + 1v_2 + ke_3 + 0e_4.$$

Ne segue che

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 & k \\ 0 & 1-T & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -T & k \\ 0 & 0 & 1 & -T \end{vmatrix} = (1-T)^2(T^2 - k).$$

Quindi gli autovalori di F sono 1 e, se $k \geq 0$, anche $\pm\sqrt{k}$. Vediamo se ci possono essere coincidenze: si verifica subito che

$$\pm\sqrt{k} = 1 \text{ se e solo se } k = 1.$$

Pertanto si ha

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k < 0$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 2)
$k = 0$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 2), $\lambda_2 = 0$ (m.a. 2)
$k = 1$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 3), $\lambda_2 = -1$ (m.a. 1)
$k > 0, k \neq 1$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 2), $\lambda_2 = -\sqrt{k}$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \sqrt{k}$ (m.a. 1)

(b) Prendiamo $\lambda_1 = 1$ come autovalore da considerare e calcoliamo la base di $V_1(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore 1 sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - 1I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z, w)$. Si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & k \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} kw = 0 \\ z + w = 0 \\ -z + kw = 0 \\ z - w = 0 \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione $z = w = 0$. Quindi gli autovettori di F associati all'autovalore 1 sono tutti del tipo $xv_1 + yv_2$ e una base di $V_1(F)$ è $\{v_1, v_2\}$. In particolare la molteplicità geometrica di 1 è 2, per ogni k .

(c) Dalla tabella precedente deduciamo che F è diagonalizzabile se $k > 0, k \neq 1$, mentre F non è diagonalizzabile se $k < 0$ o se $k = 1$.

Nel caso $k = 0$ calcoliamo la molteplicità geometrica di $\lambda_2 = 0$. Posto $T = 0$ nella matrice $M_e(F) - TI_4$ si ottiene

$$M_e(F) - 0I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che si vede subito avere rango 3 e quindi $mg(0) = 4 - r(M_e(F) - 0I_4) = 1 < 2 = ma(2)$. Dunque in tal caso F non è diagonalizzabile.

Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $k > 0, k \neq 1$. ■

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate.

Sia S_k il sottospazio di giacitura $W_k = \langle ke_1 + 2e_2 - 2e_3, 2e_1 + e_2 - e_3 \rangle$ e passante per il punto $Q = Q(1, 1, 0, 0)$ (coordinate nel riferimento affine dato) e sia r la retta di A di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} X = t \\ Y = t \\ Z = 2t + 1 \\ W = -t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare la dimensione di S_k e le sue equazioni cartesiane.

(b) Determinare i valori di k (se esistono) per i quali:

(b1) r è parallela a S_k ;

(b2) r è contenuta in S_k .

(c) Determinare i valori di k (se esistono) per i quali esiste un piano p di A tale che p è parallelo ad r ed a S_k .

SOLUZIONE:

$$(a) \dim S_k = \dim W_k = r \left(\begin{pmatrix} k & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 4 \\ 2 & \text{se } k \neq 4 \end{cases}.$$

Per calcolare le equazioni cartesiane di S_k vediamo prima quelle di W_k .

Se $k = 4$ prendiamo $w_1 = 2e_1 + e_2 - e_3$ come base di W_k e completiamo ad una base $\{w_1, u_1, u_2, u_3\}$ di V scegliendo $u_1 = e_1, u_2 = e_2, u_3 = e_4$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Allora abbiamo

$$\begin{cases} w_1 = 2e_1 + e_2 - e_3 \\ u_1 = e_1 \\ u_2 = e_2 \\ u_3 = e_4 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} e_1 = u_1 \\ e_2 = u_2 \\ e_3 = -w_1 + 2u_1 + u_2 \\ e_4 = u_3 \end{cases}.$$

Come visto a lezione le equazioni cartesiane di W_4 sono $Cv = 0$ dove $v = {}^t(v_1, v_2, v_3, v_4)$ e

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cioè sono

$$\begin{cases} v_1 + 2v_3 = 0 \\ v_2 + v_3 = 0 \\ v_4 = 0 \end{cases}.$$

Ora un punto $P = P(X, Y, Z, W) \in S_4$ se e solo se $\vec{QP} \in W_4$ se e solo se $(X-1, Y-1, Z, W)$ soddisfa le equazioni di W_k e quindi se e solo se (ottenendo le equazioni cartesiane di S_4)

$$S_4 : \begin{cases} X + 2Z = 1 \\ Y + Z = 1 \\ W = 0 \end{cases}.$$

Se $k \neq 4$ prendiamo $w_1 = 2e_1 + e_2 - e_3, w_2 = ke_1 + 2e_2 - 2e_3$ come base di W_k e completiamo ad una base $\{w_1, w_2, u_1, u_2\}$ di V scegliendo $u_1 = e_3, u_2 = e_4$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ k & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 - k \neq 0.$$

Allora abbiamo

$$\begin{cases} w_1 = 2e_1 + e_2 - e_3 \\ w_2 = ke_1 + 2e_2 - 2e_3 \\ u_1 = e_3 \\ u_2 = e_4 \end{cases}.$$

da cui

$$\begin{cases} e_1 = -\frac{2}{k-4}w_1 + \frac{1}{k-4}w_2 \\ e_2 = \frac{k}{k-4}w_1 - \frac{2}{k-4}w_2 + u_1 \\ e_3 = u_1 \\ e_4 = u_2 \end{cases}$$

Come sopra le equazioni cartesiane di W_k sono $Cv = 0$ dove $v = {}^t(v_1, v_2, v_3, v_4)$ e

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cioè sono

$$\begin{cases} v_2 + v_3 = 0 \\ v_4 = 0 \end{cases}.$$

Ora un punto $P = P(X, Y, Z, W) \in S_k$ se e solo se $\vec{QP} \in W_k$ se e solo se $(X-1, Y-1, Z, W)$ soddisfa le equazioni di W_k e quindi se e solo se (ottenendo le equazioni cartesiane di S_k)

$$S_k : \begin{cases} Y + Z = 1 \\ W = 0 \end{cases}.$$

(b) La giacitura di r è $\langle e_1 + e_2 + 2e_3 - e_4 \rangle$ pertanto r è parallela a S_k se e solo se $e_1 + e_2 + 2e_3 - e_4 \in W_k$ ovvero se e solo se

$$r \left(\begin{pmatrix} k & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 4 \\ 2 & \text{se } k \neq 4 \end{cases}.$$

Ma si vede subito che la matrice sopra ha rango 2 se $k = 4$ e 3 se $k \neq 4$, pertanto r non è mai parallela a S_k .

Si conclude allora anche che r non è mai contenuta in S_k .

(c) Supponiamo che esista un piano p di A che è parallelo ad r ed a S_k . Se $k \neq 4$, essendo S_k un piano, si ha $\text{giac}(r) \subset \text{giac}(p) = \text{giac}(S_k)$, che implica l'assurdo che r è parallela a S_k . Se invece $k = 4$ si ha $\text{giac}(r) \subset \text{giac}(p)$ e $\text{giac}(S_4) \subset \text{giac}(p)$. Dato che r e S_4 non sono parallele ne segue che

$$\text{giac}(p) = \text{giac}(r) + \text{giac}(S_4).$$

Dunque in questo caso p esiste: è un qualsiasi piano con giacitura $\text{giac}(r) + \text{giac}(S_4)$. Si conclude allora che p esiste se e solo se $k = 4$. ■

3. Siano V, W, U tre spazi vettoriali reali e sia $\dim V = n, \dim W = m, \dim U = p$. Sia $F : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare.

(a) Dimostrare che se esiste un'applicazione lineare $G : W \rightarrow U$ tale che $N(G) \cong \text{Im}(F)$ e $N(F) \cong \text{Im}(G)$, allora $n = m$ e $n(F) \leq p$;

(b) Dimostrare che se $n = m$ allora per ogni applicazione lineare $F : V \rightarrow W$ tale che $n(F) \leq p$, esiste un'applicazione lineare $G : W \rightarrow U$ tale che $N(G) \cong \text{Im}(F)$ e $N(F) \cong \text{Im}(G)$;

(c) Esiste un'applicazione lineare $G : W \rightarrow V$ tale che $V/N(F) \cong W/N(G)$?

SOLUZIONE:

3. Sia $s = n(F)$, sia $\{v_1, \dots, v_s\}$ una base di $N(F)$ e sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ un completamento ad una base di V (se $s = 0$, assumiamo che sia semplicemente una base di V). Come è noto una base di $\text{Im}(F)$ è data da $\{F(v_{s+1}), \dots, F(v_n)\}$, da cui deduciamo che $n - s = r(F) \leq m$. Sia ora $\{F(v_{s+1}), \dots, F(v_n), w_1, \dots, w_{m-n+s}\}$ un completamento ad una base di W (se $n - s = m$, assumiamo che non ci sia nessun w_i).

(a) Dato che $N(G) \cong \text{Im}(F)$ e $N(F) \cong \text{Im}(G)$ si ha $n(G) = r(F)$ e $n(F) = r(G) \leq p$. Inoltre, per il teorema di rango-nullità si ha

$$n = n(F) + r(F) = r(G) + n(G) = m.$$

(b) Ora $\{F(v_{s+1}), \dots, F(v_n), w_1, \dots, w_s\}$ è una base di W e per definire G , come è noto, è sufficiente darne i valori sulla base. Dato che $s \leq p$ esistono s vettori linearmente indipendenti $u_1, \dots, u_s \in U$. Definiamo

$$G(w_i) = u_i, 1 \leq i \leq s, \quad G(F(v_j)) = 0, s+1 \leq j \leq n.$$

Allora $\{u_1, \dots, u_s\}$ è una base di $\text{Im}(G)$ e pertanto $r(G) = s = n(F)$, quindi $N(F) \cong \text{Im}(G)$. Inoltre $n(G) = m - r(G) = n - n(F) = r(F)$ quindi $N(G) \cong \text{Im}(F)$.

(c) Per il teorema dell'omomorfismo si ha che $V/N(F) \cong \text{Im}(F)$ e $W/N(G) \cong \text{Im}(G)$, da cui $V/N(F) \cong W/N(G)$ se e solo se $\text{Im}(F) \cong \text{Im}(G)$ se e solo se $r(F) = r(G)$.

Dunque ci resta da costruire una G tale che $r(F) = r(G)$. Definiamo

$$G(w_i) = 0, 1 \leq i \leq m - n + s, \quad G(F(v_j)) = v_j, s + 1 \leq j \leq n.$$

Allora $\{v_{s+1}, \dots, v_n\}$ è una base di $\text{Im}(G)$ e pertanto $r(G) = n - s = r(F)$.

Si deduce che per ogni F una tale G esiste. ■