UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2017-2018

Seconda prova di esonero

TESTO

1. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e siano $v_1 = e_1 + e_2, v_2 = e_2 + e_3$. Sia F un endomorfismo di V tale che $v_1, v_2 \in V_1(F)$ e

$$F(e_3) = e_2 + e_3 + e_4, F(e_4) = ke_1 + (k+1)e_2 + (k+1)e_3.$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Scelto un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate.

Sia S_k il sottospazio di giacitura $W_k =< ke_1 + 2e_2 - 2e_3, 2e_1 + e_2 - e_3 >$ e passante per il punto $Q = Q(1, 1, 0, 0)$ (coordinate nel riferimento affine dato) e sia r la retta di A di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} X = t \\ Y = t \\ Z = 2t + 1 \\ W = -t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare la dimensione di S_k e le sue equazioni cartesiane.

(b) Determinare i valori di k (se esistono) per i quali:

(b1) r è parallela a S_k;

(b2) r è contenuta in S_k.

(c) Determinare i valori di k (se esistono) per i quali esiste un piano p di A tale che p è parallelo ad r ed a S_k.

3. Siano V, W, U tre spazi vettoriali reali e sia $\dim V = n, \dim W = m, \dim U = p$. Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare.

(a) Dimostrare che se esiste un'applicazione lineare $G : W \to U$ tale che $N(G) \cong \mathrm{Im}(F)$ e $N(F) \cong \mathrm{Im}(G)$, allora $n = m$ e $n(F) \leq p$;

(b) Dimostrare che se $n = m$ allora per ogni applicazione lineare $F : V \to W$ tale che $n(F) \leq p$, esiste un'applicazione lineare $G : W \to U$ tale che $N(G) \cong \mathrm{Im}(F)$ e $N(F) \cong \mathrm{Im}(G)$;

(c) Esiste un'applicazione lineare $G : W \to V$ tale che $V/N(F) \cong W/N(G)$?