Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

TUTORATO DI GE110

Anno Accademico 2017/2018

Docente: Angelo Felice Lopez

Tutori: Alessio Rampogna e Gaudenzio Falcone

Tutorato 10

17 Maggio 2018

SOLUZIONI

1. (a): Per determinare l'immagine, basta ricordare che $Im(f) = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3)\rangle$ dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ è una base fissata. Se consideriamo la base canonica, otteniamo che $dim(Im(f)) = 2$. Pertanto f non è suriettiva (infatti lo spazio d'arrivo ha dimensione 3). Infine il vettore cercato è, ad esempio, $v = (0, 1, 0)$.

   (b): Abbiamo visto nel punto precedente che la dimensione dell'immagine è 2. Per il teorema di rango-nullità si deduce che $dim(N(f)) = 1$ e quindi il nucleo non e banale; ergo f non è iniettiva. Per quanto riguarda i vettori a e b basta scegliere $a = (1, -1, -1)$ e $b = (0, 1, 0)$.

   (c): $f(U) = \langle f(u), f(w)\rangle = \langle (2, 2, -1), (2, 1, 1)\rangle$. Quindi $v = (4, 3, -2) \in f(U) \iff det(M) = 0$ dove M è la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Tuttavia $det(M) \neq 0$ quindi $v \notin f(U)$.

2. (a): f è lineare. $Im(f) = \langle (0, 1, 2), (2, 0, 2)\rangle$ mentre $N(f) = \{(t, -t, \frac{t}{2}) : t \in \mathbb{R}\}$.

   (b): f è lineare. $Im(f) = \langle (1, 2, 0, 3), (-2, 1, 5, -1)\rangle$ e $N(f) = \langle (0, 0)\rangle$

   (c): f è lineare. $Im(f) = \langle (1, 1), (-1, -1), (-1, 1)\rangle$ e $N(f) = \langle (0, 1, 1)\rangle$.

3. Supponendo che una siffatta applicazione esista si avrebbe che $dim(N(f)) = 2$ e dal teorema di rango nullità deduciamo che $dim(Im(f)) = 2$. Pertanto f non può essere suriettiva. f quindi non esiste.

4. La dimensione dell'immagine è esattamente il rango della matrice, ossia 4. Dal teorema di rango nullità concludiamo che il nucleo ha dimensione 0.

5. La matrice associata risulta essere: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pertanto $f(x,y) = A(x,y)^t = (x+4y, 2x, x+y)^t$.

   Siccome l'immagine di f è $\langle (1,2,1),(4,0,1) \rangle$ allora deduciamo che $(3,4,1) \notin Im(f)$ mentre $(3,-2,0) \in Im(f)$.

6. Usiamo il fatto che se $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ allora $M_{B',B}(T) = (M_{e,B'}(Id_n))^{-1} M_{e,e}(T) M_{e,B}(Id_m)$, dove $M_{e,e}(T)$ è la matrice associata a T rispetto alla base canonica in $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$. Otteniamo pertanto:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

7.
   - f non è suriettivo se e solo se il determinante di A è nullo, ossia sse $h = 2$.
   - L'immagine di f è $\langle (2,1,-1),(1,2,1) \rangle$.
   - Il vettore $v = (1, k^2 - k, k)$ appartiene all'immagine se e solo se $k = 1 \pm \sqrt{2}$.
   - Basta scegliere un vettore linearmente indipendente con quelli che formano la base dell'immagine: $v = (1,0,1)$.
   - Per il teorema di rango nullità si ha $dim(N(f)) = 1$. Per trovarne una base basta risolvere $Ax = 0$. Otteniamo $N(f) = \langle (1,-1,1) \rangle$.

- Applicando la formula di Grassmann vettoriale si ha:

$$dim(N(f)) + dim(Im(f)) =$$
$$dim(N(f) + Im(f)) + dim(N(f) \cap Im(f))$$

da cui:

$$dim(N(f) \cap Im(f) = 2 + 1 - 3 = 0$$

quindi: $N(f) \cap Im(f) = \langle (0,0,0) \rangle$.

- Dire che $f(v) = (3, 2, -2)$ per qualche v, è equivalente a richiedere che $(3, 2, -2)$ stia nell'immagine, ossia se e solo se $det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ è uguale a zero. In tal caso però il determinante è non nullo e quindi il vettore non appartiene all'immagine e pertanto non esiste v. Nel secondo caso si procede analogamente e si ottiene che non esiste $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $f(v) = (1, 2, -1)$.