GE110 - Geometria 1: Soluzioni Tutorato 11

Docente: Angelo Felice Lopez
Tutori: Gaudenzio Falcone, Alessio Rampogna
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

24 Maggio 2018

Soluzione 1 *Dalle condizioni date nell'esercizio si ricavano facilmente* $f(e_1), f(e_2)$ *e* $f(e_3)$ *di conseguenza si ha che la matrice associata ad* f *rispetto alla base canonica* Can *di* $\mathbb{R}^3$ *è* $M_{\mathcal{C}an}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soluzione 2

- *Per quanto riguarda il* $ker(f)$ *basta calcolare al variare di* k *le soluzioni del sistema lineare omogeneon dato da* $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ *e si ottiene che per* $k \neq 2$ *l'applicazione è iniettiva (i.e il* $ker(f)$ *è banale) e di conseguenza, per il teorema di rango-nullità,* $dim(Im(f)) = 3$ *quindi* f *è suriettiva. Mentre se* $k = 2$ *si ha che* $ker(f) = \{(t, 2t, -t) \,|t \in \mathbb{R}\}$ *quindi la sua dimensione è 1 e di conseguenza la dimensione dell'immagine è 2.*

- *La matrice dell'endomorfismo associata alla base* $\mathcal{B}$ *è* $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3+k & -6+k \\ 2 & 2-k & 4-k \end{pmatrix}$

- *Si tratta di risolvere il sistema* $f(x, y, z) = (3, -1, 2)$ *e si trova che se* $k = 2$ *il sistema non ammette soluzioni quindi* $f^{-1}((3, -1, 2)) = \emptyset$ *mentre se* $k \neq 2$ *il sistema ha* ∞^1 *soluzioni della forma* $(\frac{k-6}{2-k}, \frac{k-10}{2-k}, \frac{12-4k}{2-k})$.

Soluzione 3

- *Basta calcolare* $det(A)$ *infatti* $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow f$ *è iniettivo.*

- *Il vettore* $(1, 1, -1)$ *è un autovettore di* f *se e solo se* $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ *tale che* $A \cdot (1, 1, -1) = \lambda(1, 1, -1)$. *Quindi verificare se esiste un tale* λ.

- 2 *è un autovalore di* f *se e solo se* $\exists v \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ *tale che* $A \cdot v = 2v$. *Verificare se esiste un tale* v.

Soluzione 4 *Siccome i vettori* $(1, 2), (0, 1)$ *costituiscono una base di* $\mathbb{R}^2$ *dalle condizioni date nell'esercizio si ricava facilmente che* $M_{\mathcal{C}an}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluzione 5 *Il determinante non è un'applicazione lineare in quanto in generale* $det(A+B) \neq det(A) + det(B)$. *Mentre l'applicazione traccia è un'applicazione lineare: si verifica facilmente che* $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$ *e che* $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$ *per ogni* $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soluzione 6 *(a) Si osserva innanzitutto che* $tr(AB) = tr(BA)$ *per ogni* $A, B \in M_n(K)$, *quindi se* A *e* B *sono simili si ha che* $\exists C \in GL_n(K)$ *tale che* $A = CBC^{-1}$ *quindi* $tr(A) = tr(CBC^{-1}) = tr(CC^{-1}B) = tr(B)$.

(b) Se A *e* B *sono simili allora hanno gli stessi autovalori* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. *Si vede facilmente che gli autovaliri di* A^n *e* B^n *sono* $\lambda_1^n, \ldots, \lambda_n^n$ *quindi* A^n *e* B^n *sono simili.*

Soluzione 7 *(A) Dal calcolo del polinomio caratteristico si trova che gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 2$,$\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$ e $\lambda_3 = 2 + \sqrt{2}$. Di conseguenza si trovano gli autovettori $v_{\lambda_1} = (1, 0, -1)$,$v_{\lambda_2} = (1, \sqrt{2}, 1)$ e $v_{\lambda_3} = (1, -\sqrt{2}, 1)$. Siccome gli autovalori sono tutti semplici (con molteplicità algebrica uguale a 1) A è diagonalizzabile.*

(B) Allo stesso modo si trova $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$ con autovettori $v_{\lambda_1} = (0, 1, 0)$,$v_{\lambda_2} = (1, 0, \frac{-3+\sqrt{17}}{4})$ e $v_{\lambda_3} = (1, 0, \frac{-3-\sqrt{17}}{4})$ e per lo stesso motivo di prima B è diagonalizzabile.

(C) In questo caso la matrice C ha solo 2 autovalori $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica uguale a 2 e $\lambda_2 = 0$ con molteplicità algebrica uguale a 1. Si verifica facilmente che la somma degli autospazi relativi ai due autovalori non è 4 quindi C non è diagonalizzabile.

Soluzione 8 *Siccome gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 7$ quindi diversi da 0 allora A è invertibile. Attraverso il calcolo dei rispettivi autospazi (e quindi autovettori) si trova che A è diagonalizzabile e in particolare si ha*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

quindi per il calcolo dell'inversa basta calcolare $A^{-1} = P^{-1}D^{-1}P$.