GE110 - Geometria 1: Soluzioni Tutorato 1

Docente: Angelo Felice Lopez
Tutori: Gaudenzio Falcone, Alessio Rampogna
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

6 Marzo 2018

Esercizio 1 *Ad esempio possiamo scegliere* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2

- $iC^2 + 3C + i\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 5i & 1 \\ 2 & 5i \end{pmatrix}$
- $3C^2 + 7C^3 = \begin{pmatrix} 3+35i & 6i-7 \\ 12i-14 & 35i+3 \end{pmatrix}$
- $C^tC = \begin{pmatrix} 3 & 3i \\ 3i & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 3 *Si procede scrivendo una generica matrice* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *(nel caso* 2×2*, mentre nel caso* $3x3$ *è analogo con la differenza che la matrice avrà più parametri) e imponendo il prodotto riga per colonna uguale a zero, ossia* $A \cdot M = 0$ *e da qui si trovano le condizioni che devono rispettare i parametri della matrice* M *affinchè questo sia possibile.*

Esercizio 4 *Basta calcolare il prodotto di* A *per se stessa 2 volte e verificare che effettivamente* $A^3 = 0$.

Esercizio 5 *Una matrice* A *si dice simmetrica se* $A^t = A$*, mentre si dice antisimmetrica se* $A^t = -A$*. Quindi affinchè* A *sia simmetrica è necessario che* $k^4 - 3k + 1 = k^4 + 2k - 3$ *e questo avviene se e soltanto se* $k = \frac{4}{5}$*. Mentre per quanto riguarda la matrice* B*, innanzitutto bisogna annullare i termini sulla diagonale e da questo si trova che* $k = 0, \frac{1}{2}, -1$*, tuttavia si vede che per nessuno di questi valori viene rispettata la proprietà di antisimmetria degli altri termini quindi non esistono valori di* k *per cui la matrice* B *sia antisimmetrica.*

Esercizio 6 *Se* A *è una matrice invertibile si ha* $\mathbb{I} = \mathbb{I}^t = (A \cdot A^{-1})^t = (A^{-1})^t \cdot A^t$ *e per l'unicità della matrice inversa si ha* $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$*. Tuttavia per ipotesi sappiamo che* A *è simmetrica quindi* $(A^t)^{-1} = A^{-1}$.

Esercizio 7 *Supponendo per assurdo che* A *sia invertibile si ha* $A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}$*. Moltiplicando per* A *ambo i lati della relazione si ottiene* $A \cdot A \cdot A^{-1} = A$ *ma sfruttando la nilpotenza di* A *e la proprietà associativa del prodotto righe per colonne (ricordando* $A^2 = 0$*) si trova* $A = 0$ *e questo è assurdo in quanto nega l'ipotesi che* A *sia nilpotente di ordine* 2.

Esercizio 8 *Prediamo una generica matrice* $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *e imponiamo la condizione* $AB = BA$*. Da questa relazione si trova che* $c = 0$,$a = d = \lambda$ *e* $b = x$ *pertanto* $B = \begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *quindi* B *è della forma cercata.*