Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

TUTORATO DI GE110

Anno Accademico 2017/2018

Docente: Angelo Felice Lopez

Tutori: Alessio Rampogna e Gaudenzio Falcone

Tutorato 2

15 Marzo 2018

SOLUZIONI

1. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ e scriviamo la matrice a blocchi $(A \ \mathbb{I}_2)$. Con le operazioni elementari $R_{21}(-2)$ e $R_2(-\frac{1}{3})$ otteniamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Quindi la matrice inversa di A è $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$.

   Con la matrice B si procede in maniera analoga. Scriviamo la matrice a blocchi $(B \ \mathbb{I}_3)$, ossia $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 12 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Applichiamo in sequenza le operazioni elementari: $R_{23}(-7)$, $R_{31}(-\frac{1}{6})$, $R_{32}(\frac{5}{42})$, $R_3(-21)$, $R_{23}(-22)$, $R_{13}(2)$, $R_2(-\frac{1}{7})$, $R_{12}(-1)$ ed infine $R_1(\frac{1}{6})$. Otteniamo pertanto $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 11 & -8 & 10 \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$.

2. Così come fatto per l'esercizio precedente consideriamo la matrice a blocchi $(A \ \mathbb{I}_3)$ ed effettuiamo operazioni elementari sulle righe fino ad ottenere la matrice identità di ordine 3 nel blocco di sinistra. In particolare con le operazioni $R_1(-1)$, $R_{31}(-k)$, R_{23}, $R_{23}(-1)$, $R_{32}(-k)$ si ottiene la matrice seguente: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3k & k & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k+3k^2 & -k^2 & 1+k & -k \end{pmatrix}$.

   Ora, se $k + 3k^2 \neq 0$ ossia se $k \neq 0, -\frac{1}{3}$ posso effettuare l'operazione elementare $R_3(\frac{1}{k+3k^2})$ e ottenere dopo alcuni passi la matrice: $\begin{pmatrix} -\frac{k}{k+3k^2} & \frac{2}{k+3k^2} & -\frac{k}{k+3k^2} \\ \frac{k^2}{k+3k^2} & -\frac{2k}{k+3k^2} & \frac{k}{k+3k^2} \\ -\frac{k^2}{k+3k^2} & -\frac{1+k}{k+3k^2} & -\frac{k}{k+3k^2} \end{pmatrix}$.

   Concludiamo quindi che A è invertibile $\Leftrightarrow k \neq 0, -\frac{1}{3}$ e la matrice inversa è quella descritta sopra.

3. • Il sistema (a) ha come unica soluzione il vettore $(-1, -5, 9)$.

- Il sistema (b) ammette ∞^2 soluzioni del tipo $(-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}t-\frac{1}{5}z, -\frac{2}{5}-\frac{3}{5}t+\frac{3}{5}z, z, t)$.
- Il sistema (c) ammette come unica soluzione $(-\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6})$.
- Il sistema (d) ammette ∞^1 soluzioni del tipo $(-2t, 0, 0, t)$

4.
   - Per quanto riguarda il sistema (a) nel procedimento di riduzione a gradini ci ritroviamo di fronte alla condizione $k^2+k-2 \neq 0$ ossia $k \neq 1, -2$ e in tal caso la soluzione esiste ed è della forma $(1, k, 2)$. Se $k = 1$ invece ci sono ∞^2 soluzioni della forma $(2-z-y, y, z)$. Infine nel caso $k = 2$ ci sono ∞^1 soluzioni della forma $(-1+z, -z, z)$.
   - Nel sistema (b) la soluzione è della forma $(k-\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2}, \frac{k^2-k}{2}, \frac{k-1}{2})$.
   - Per il sistema (c) si hanno i seguenti casi: se $k = 2$ il sistema è incompatibile, per $k = 3$ le soluzioni sono della forma $(-\frac{5t+8}{8}, \frac{7t}{8}, \frac{t-12}{4}, t)$. Infine se $k \neq 2, 3$ la soluzione del sistema è data da $(-\frac{3k+8}{2k-4}, \frac{7k}{4k-4}, 0, \frac{k^2+5k}{4k-4})$.

5. Se A è la matrice quadrata del sistema, X vettore colonna delle incognite e b vettore colonna dei termini noti, possiamo scrivere la seguente equazione matriciale per rappresentare il sistema lineare che stiamo considerando:

$$AX = b$$

Se A è invertibile allora vale che $A^{-1}AX = A^{-1}b$ e quindi $X = A^{-1}b$. Per risolvere il sistema basterà quindi trovare la matrice A^{-1} e moltiplicarla per il vettore b. Procedendo come negli esercizi precedenti per quanto riguarda il calcolo della matrice inversa, si trova che $X^t = (0, 1, 0)$.

6. Mostriamo l'intero procedimento per la matrice A, per la matrice B si procede in maniera del tutto analoga.
Cominciamo applicando operazioni elementari su A per trasformarla nella matrice identità $\mathbb{I}_2$. Ossia effettuiamo in sequenza R_{12}, $R_{21}(-2)$, $R_2(-\frac{1}{5})$ e $R_{12}(-4)$.
Ricordiamo che eseguire un'operazione elementare sulla riga di una matrice equivale a moltiplicare tale matrice per la matrice identità sulla quale è stata effettuata la stessa operazione elementare. Pertanto possiamo scrivere:

$$E_{12}(-4)\ E_2(-\tfrac{1}{5})\ E_{21}(-2)\ E_{12}\ A = \mathbb{I}_2$$

Moltiplicando per le inverse (che rimarranno matrici elementari) possiamo scrivere:

$$A = E_{12}^{-1}\ E_{21}^{-1}(-2)\ E_{2}^{-1}(-\tfrac{1}{5})\ E_{12}^{-1}(-4)$$

Da cui:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$