GE110 - Geometria 1: Soluzioni Tutorato 3

Docente: Angelo Felice Lopez
Tutori: Gaudenzio Falcone, Alessio Rampogna
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

22 Marzo 2018

Soluzione 1 *Bisogna controllare per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi se sono gruppi abeliani rispetto alla somma e chiusi rispetto al prodotto per uno scalare.*

(a) Non è un sottospazio vettoriale in quanto presi $(1,0,0)$ *e* $(-1,0,0)$ *si ha che la loro somma non appartiene all'insieme.*

(b) Non è un sottospazio vettoriale in quanto di tratta di un piano in $\mathbb{R}^3$ *non passante per l'origine.*

(c) Questo insieme rappresenta un cubo in $\mathbb{R}^3$ *di lato uguale a* 1 *che non è un sottospazio vettoriale in quanto, ad esempio, non è chiuso rispetto al prodotto per scalari.*

(d) Non è un sottospazio vettoriale in quanto presi $(0,0,2)$ *e* $(0,0,-1)$ *si ha che la loro somma, essendo proprio il vettore* $(0,0,1)$*, non appartiene all'insieme.*

(e) Non è un sottospazio vettoriale in quanto presi $(0,0,1)$ *e* $(1,1,0)$ *si ha che loro somma, avendo tutte le componenti diverse da* 0*, non appartiene all'insieme.*

(f) È un sottospazio vettoriale in quanto rappresenta lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo. La sua dimensione è uguale ad 1 *e una base è costituita, ad esempio, dal vettore* $(1,-1,0)$*.*

(g) Consistendo solo del punto $(0,0,0)$*, si tratta dello spazio vettoriale nullo.*

(h) Non è un sottospazio vettoriale in quanto non chiuso rispetto al prodotto per scalari.

Soluzione 2 *Si imposta il sistema lineare omogeneo dato da:*

$$xA + yB + zC + tD = 0$$

dove lo 0 *indica la matrice nulla. In particolare si tratta di un sistema lineare omogeneo in quattro incognite e, chiaramente, se si tratta di una base allora tale sistema avrà solo la soluzione banale* $(0,0,0,0)$*. Per scrivere* E *rispetto a tale base bisogna impostare un altro sistema lineare (non omogeneo) dato da:*

$$xA + yB + zC + tD = E$$

anche questo è un sistema di 4 *equazioni in* 4 *incognite la cui unica soluzione è data da* $(-\frac{11}{21}, -\frac{13}{7}, -\frac{8}{21}, \frac{7}{21})$*.*

Soluzione 3 *Presa* $M \in GL_n(K)$ *si ha che* $0 \cdot M = 0 \notin GL_n(K)$*.*

Soluzione 4 *Si osservano i seguenti fatti:*

- *I vettori* a, b *e* c, d *sono rispettivamente linearmente indipendenti quindi* $dim_{\mathbb{R}} W_1 = dim_{\mathbb{R}} W_2 = 2$*.*

- *I vettori a, b, c sono linearmente dipendenti e ciò significa che $c \in W_1$, mentre i vettori a, b, d generano tutto $\mathbb{R}^3$ quindi $d \notin W_1$.*

- *Da quanto osservato precedentemente possiamo scrivere $W_1 \cup W_2 = \{c\}$.*

Soluzione 5 • *Si verifica facilmente che si tratta di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$. La sua dimensione è 3 e una sua base è data da:*

$$\{(1, -2, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$$

- *Impostiamo il sistema lineare omogeneo $x_1a+x_2b+x_3c+x_4d = 0$. Le sue soluzioni sono le seguenti* $\begin{cases} x_1 = -2v - t \\ x_2 = 6v - 3t \\ x_3 = v \\ x_4 = t \end{cases}$ *. Si nota pertanto che i vettori d e c sono combinazioni lineari dei vettori a e b rispettivamente per le scelte di $(t, v) = (0, 1), (1, 0)$. Quindi $dim_{\mathbb{R}} W_2 = 2$ e una base è $\{a, b\}$.*

- *Basta osservare che i vettori della base di W_1 e quelli della base di W_2 sono indipendenti pertanto si ha $W_1 \cup W_2 = \emptyset$, da cui la tesi.*

- *Definiamo W_3 mediante la sua base:*

$$W_3 =< (0, 3, 1, -2, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 2, 1, 1) >$$

Soluzione 6 *Dalla definizione segue che*

$$U \oplus W =< (1, 0, \sqrt{5}, 0), (\sqrt{5}, 0, -1, 0), (0, -2, 0, 3), (0, 1, 0, 1) >$$

basta quindi verificare che i 4 vettori sono linearmente indipendenti.

Soluzione 7 *In generale presi k vettori $\{v_1, \cdots, v_k\}$ in un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V di dimensione n con $k \leq n$ per verificare se questi sono linearmente indipendenti si imposta il sistema lineare omogeneo dato da*

$$a_1v_1 + \cdots + a_kv_k = 0$$

e si vede se questo possiede solo la soluzione banale $(0, \cdots, 0)$. Dunque:

(a) Non sono linearmente indipendenti, siccome la dimensione dello spazio è 2 non sono generatori quindi non sono una base.

(b) Tre vettori di $\mathbb{R}^2$ sono sempre linearmente dipendenti quindi non sono una base ma sono generatori perchè $(1, 2), (-1, -1)$ sono indipendenti.

(c) I vettori non sono linearmente indipendenti quindi nemmeno una base. Siccome la dimensione dello spazio è 3 non sono nemmeno generatori.

(d) Essendo 4 vettori in uno spazio di dimensione 3 non sono una base nè linearmente indipendenti. Risultano però generatori in quanto i vettori $(1, 0, 0), (1, 1, 1)$ $e(0, 1, 2)$ sono linearmente indipendenti.

(e) Sono linearmente indipendenti e generatori quindi sono una base.