Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

TUTORATO DI GE110

Anno Accademico 2017/2018

Docente: Angelo Felice Lopez

Tutori: Alessio Rampogna e Gaudenzio Falcone

Tutorato 4

29 Marzo 2018

SOLUZIONI

1. Se per assurdo $U \cap V = \{0\}$ allora si avrebbe che $dim(U \cap V) = 0$ ma dalla formula di Grassmann si ha che $dim(U + V) = dim(U) + dim(V) = 2 + 2 = 4$. Pertanto segue che $U + V$, che è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$, avrebbe dimensione maggiore dello spazio in cui è contenuto. Assurdo!

   Possiamo avere $dim(U \cap V) = 1, 2$. Se è 1 allora da Grassmann deduciamo che $dim(U+V) = 3$ e possiamo prendere $U =< (1, 0, 0), (0, 1, 0) >$ e $V =< (0, 0, 1), (0, 1, 0) >$. Se invece è 2 allora $dim(U+V) = 2$ perciò basta prendere $U = V$ di dimensione 2.

2. Il sottospazio H è descritto da un sistema omogeneo di due equazioni in tre incognite. Risolvendolo ci accorgiamo che le soluzioni sono del tipo $(-2y, y, z, 0)$ da cui deduciamo che $\{(-2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ è una base e che quindi $dim(H) = 2$.

   Per quanto concerne K invece osserviamo che i vettori $(2, 4, -1, 1)$ e $(1, 2, 4, 5)$ sono combinazione lineare dei vettori $(1, 2, 0, 1)$ e $(0, 0, 1, 1)$. Inoltre i vettori $(1, 2, 0, 1), (0, 0, 1, 1)$ e $(1, -1, 0, 5)$ sono indipendenti e quindi costituiscono una base di K che avrà dimensione 3.

   $\diamondsuit$

   La dimensione di $H + K$ è il rango della matrice che ha per righe i vettori delle basi di H e K. In particolare $dim(H + K) = 4$. Inoltre dalla formula di Grassmann deduciamo che $dim(H \cap K) = 1$. Per quanto riguarda le basi, siccome $H + K = \mathbb{R}^4$ allora per lo spazio $H + K$ basta scegliere la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Per la base di $H \cap K$ dobbiamo trovare un vettore che possa esprimersi sia nella base di H che nella base di K. A tale scopo si imposta un sistema lineare dal quale si ottiene, ad esempio, il vettore $(-6, 3, 26, 0)$ che essendo non nullo è una base di $H \cap K$.

   $\diamondsuit$

Dal punto precedente ricordiamo che $H + K = \mathbb{R}^4$ e quindi necessariamente $v = (1, 2, 3, 4) \in H + K$. Non essendo la somma diretta è possibile scrivere v in più modi come somma di un vettore di H e di un vettore di K; ad esempio $v = (1, 2, 0, 1) + 3 \cdot (0, 0, 1, 1)$.

3. Si ha che: $r(A) = 3$, $r(B) = 2$ e $r(C) = 2$.

4. Per quanto riguarda la base canonica osserviamo immediatamente che $v_1 = 3e_1 + 2e_2 - 5e_3$ e analogamente per v_2 e v_3. Quindi le coordinate nella base canonica sono esattamente $(3, 2, -5)$, $(1, 0, -\frac{1}{2})$ e $(1, 1, 1)$.

$\diamondsuit$

Per trovare le coordinate nella seconda base dobbiamo impostare un sistema lineare. Ad esempio, consideriamo v_1. Dobbiamo scrivere $v_1 = a(1, 1, 2) + b(1, 0, 1) + c(0, 2, 1)$ e risolvendo otteniamo $a = -18, b = 21$ e $c = 10$. Procedendo in maniera analoga per gli altri due vettori si ottiene $a = -3, b = 4$ e $c = \frac{3}{2}$; infine $a = -1, b = 2$ e $c = 1$.

5. Nel primo caso sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base.

$\diamondsuit$

Nel secondo caso sono dipendenti (basta notare che $(2, 3, 3, 2) = 2(1, 0, 0, 1) - 3(0, -1, -1, 0)$ e che quindi posso escludere il vettore $(2, 3, 3, 2)$ dall'insieme). Un base è quindi costituita da $\{(1, 0, 0, 1), (0, -1, -1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

$\diamondsuit$

Sono dipendenti $\forall h \in \mathbb{R}$. Se $h \neq 1$ allora posso completarla scrivendo $(h, 0, 1, 0), (1, 3, 2, 0), (1, 0, h, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$. Se $h = 1$ allora posso scegliere $(1, 3, 2, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$.

6. Impostando il sistema lineare omogeneo si può vedere che l'unica soluzione è quella banale e che quindi i vettori sono linearmente indipendenti. (Equivalentemente si può calcolare il rango della matrice le cui righe sono i vettori a, b, c e verificare che esso sia proprio 3).

$\diamondsuit$

Basta scegliere un vettore che sia linearmente indipendente rispetto agli altri 3. Ad esempio $(0, 0, 0, 1)$.

$\diamondsuit$

Notiamo che H è descritto da un sistema lineare omogeneo. Risolvendolo si ottiene che $H =< (1,0,0,0),(0,0,-1,1) >$. Per vedere se $H \subseteq K$ basta verificare se i generatori di H sono contenuti in K. Osserviamo però che $(1,0,0,0) \notin K$ e che quindi $H \nsubseteq K$.

7. Anche in questo caso H è descritto da un sistema lineare omogeneo. Risolvendolo si ottiene che $H =< (1,0,-2,1),(0,1,1,1) >$ da cui deduciamo che H ha dimensione due. Per K invece basta notare che i generatori sono linearmente indipendenti e che quindi $dim(K) = 2$. Per trovare la dimensione di $H + K$ calcoliamo il rango della matrice le cui righe sono i vettori che generano i due spazi. Si trova allora che $dim(H + K) = 4$. Dalla formula di Grassmann si ottiene che $dim(H \cap K) = 0$ e che quindi la somma tra i sottospazi è diretta.