Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

TUTORATO DI GE110

Anno Accademico 2017/2018

Docente: Angelo Felice Lopez

Tutori: Alessio Rampogna e Gaudenzio Falcone

Tutorato 6

19 Aprile 2018

SOLUZIONI

Ricordiamo anzitutto alcuni fatti dalla teoria. Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ allora il complemento algebrico dell'elemento a_{ij} è:

$$A_{ij} := (-1)^{i+j} det(A(1...\hat{i}...n|1...\hat{j}...n))$$

ossia il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando la riga i e la colonna j, considerato con un opportuno segno.

La matrice cofattore di A è:

$$cof(A) := (A_{ij})$$

ossia la matrice dove l'elemento di riga i e colonna j è esattamente il complemento algebrico di a_{ij}.

Come vedrete a lezione se A è invertibile vale la seguente identità fondamentale:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}{}^t[cof(A)]$$

$$\diamondsuit$$

1. In generale se $A \in M_2(\mathbb{R})$ allora $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Pertanto $det(A) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot (-3) = 4$; $det(B) = 6 \cdot 1 - 8 \cdot 5 = -34$.

   Per le matrici di ordine 3 o superiori si applica il teorema di Laplace sviluppando rispetto ad una riga o colonna prescelta (qualunque scelta si faccia il determinante non cambia!). Per semplificare il calcolo è opportuno scegliere quando possibile la riga o colonna col maggior numero di zeri. Consideriamo la matrice C, allora sviluppando rispetto alla prima riga:

   $$det(C) = 1 \cdot (-18 + 24) - 2 \cdot (-9 + 21) + 3 \cdot (-8 + 14) = 6 - 24 + 18 = 0$$

   Bastava comunque notare che la prima e la seconda riga sono proporzionali e che quindi il determinante è nullo.

   Nella matrice D compare un parametro $k \in \mathbb{R}$, il calcolo del determinante avviene in maniera del tutto analoga ai casi precedenti:

$$det(D) = 6 \cdot (4-0) - k \cdot (2 - k^2 + k) + 1 \cdot (0 - 2k) =$$
$$24 - 2k + k^3 - k^2 - 2k = k^3 - k^2 - 4k + 24$$

sviluppando rispetto alla prima riga.

Infine si ha $det({}^tA) = det(A) = 4$ e $det(AB) = det(A) \cdot det(B) = 4 \cdot (-34) = 136$.

2. Applicando quanto detto sopra per il calcolo della matrice inversa, otteniamo:

   - $A^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$
   - $B^{-1} = \frac{2}{105}\begin{pmatrix} -13/2 & 11 & -1/2 \\ -28 & 7 & 14 \\ 25/2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$
   - Osserviamo che $det(C) = (1-k) \cdot (-2 - k^2 + k)$. Una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è non nullo, quindi $C \in GL_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow k \neq 1$. Pertanto se $k \neq 1$ possiamo scrivere C^{-1} che risulta essere: $C^{-1} = \frac{1}{(1-k)(-2-k^2+k)}\begin{pmatrix} 0 & 2-2k & k^2-2k+1 \\ k^2-k+2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2-k & k-1 \end{pmatrix}$

3. Supponiamo prima che A sia non invertibile, allora deve esistere un sottoinsieme di righe che sono fra loro dipendenti e quindi anche la matrice N risulta non invertibile. Ragionando sulle colonne invece, deve esistere un sottoinsieme di colonne dipendenti e quindi la matrice M non è invertibile. Allora si ha:

$$det(M) = det(A) = det(N) = 0$$

ossia

$$det(M) = 0 = det(A) \cdot det(C) = 0 = det(N).$$

Se invece A è invertibile allora osserviamo che:

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -BA^{-1} & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Usando gli sviluppi di Laplace è facile dedurre che la matrice più a sinistra nell'uguaglianza ha determinante 1, la seconda matrice da destra ha determinante pari a quello della matrice A e infine l'ultima

matrice (quella più a destra) ha lo stesso determinante di C. Ma siccome il determinante del prodotto è il prodotto dei determinanti allora $det(N) = det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}) = det(A) \cdot det(C)$. E siccome vale che $M = {}^tN$ allora $det(M) = det(N)$ e quindi abbiamo concluso.

Osservazione: Siccome le entrate delle matrici M e N sono a loro volta matrici, NON è possibile applicare la formula del determinante di una matrice 2×2.

4. Se prendiamo $A = B = I_n$ con $n \geq 2$ allora avremo:

$$det(A + B) = 2^n \neq det(A) + det(B) = 2$$

5. Ricordiamo che il rango di una matrice M può essere definito anche come il massimo ordine dei minori non nulli estraibili da M.

   - La matrice A ha rango massimo $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$. Calcolando il determinante otteniamo:

     $$det(A) = 1 \cdot (1 - k^2) - k \cdot (1 - 2k) + k \cdot (k - 2) = \\ 1 - k^2 - k + 2k^2 + k^2 - 2k = 2k^2 - 3k + 1$$

     e imponendo $det(A) \neq 0$ si ha:

     $$2k^2 - 3k + 1 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 1, \tfrac{1}{2}$$

     Concludiamo quindi che A ha rango massimo se e solo se $k \neq 1, \frac{1}{2}$.

   - Cominciamo notando che $0 \leq r(B) \leq 3$. Basta quindi trovare un minore di ordine 3 non nullo. Ad esempio se consideriamo $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & k & 2 \\ k+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ allora calcolando il determinante avremo: $-1 \cdot (1 - 2k - 2) + 1 \cdot (-k^2 - k) = -1 + 2k + 2 - k^2 - k = k^2 + k + 1$. Da cui: $k^2 + k + 1 \neq 0 \; \forall k \in \mathbb{R}$. Concludiamo quindi che $r(B) = 3 \; \forall k$.

   - Calcolando il determinante di C otteniamo:

     $$det(C) = -2k^2 + 2k$$

     da cui

     $$det(C) \neq 0 \Leftrightarrow r(C) = 4 \Leftrightarrow k \neq 0, 1$$

- Per la matrice D, a priori vale che $0 \leq r(D) \leq 3$; tuttavia notiamo che c'è un minore di ordine 2 non nullo (ossia $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$) e quindi $2 \leq r(D) \leq 3$. Inoltre per i minori di ordine 3 (ve ne sono solo 3) si ha che o il loro determinante è nullo oppure vale $k^2 - k$ o $-k^2 + k$. Deduciamo quindi che D ha rango massimo $\Leftrightarrow k \neq 1, 0$.

6. Ricordiamo che una matrice M si dice ortogonale se è invertibile e l'inversa coincide con la trasposta.

   Se $M \in O_n(K)$ allora vale che $M \cdot M^{-1} = M \cdot {}^tM = \mathbb{I}_n$. Ricordando la formula di Binet otteniamo: $det(M{}^tM) = det(M) \cdot det({}^tM) = det(\mathbb{I}_n) = 1$. Ma essendo il determinante di una matrice uguale a quello della sua trasposta segue che: $det^2(M) = 1$ ossia $det(M) = \pm 1$.

   $O_n(K)$ **non** è sottospazio vettoriale di $M_n(K)$ infatti ad esempio $O_n(K)$ non è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare (si pensi a $K \ni k = 0$).