GE110 - Geometria 1: Soluzioni Tutorato 7

Docente: Angelo Felice Lopez
Tutori: Gaudenzio Falcone, Alessio Rampogna
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

26 Aprile 2018

Esercizio 1 *Condizione necessaria e sufficiente per risolvere un sistema di equazioni lineari con il metodo di Cramer è che $det(A) \neq 0$ dove con $A \in M_n(K)$ indichiamo la matrice dei coefficienti del sistema. In tal caso le soluzioni del sistema saranno date da*

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}$$

per ogni $i = 1, \cdots, n$. Di seguito si riportano le soluzioni dei sistemi lineari da risolvere:

(1) $= \frac{6}{5}$, $y = -\frac{1}{5}$ *e* $z = \frac{4}{5}$

(2) $x = 0$, $y = 0$ *e* $z = 0$ *per ogni* $k \in \mathbb{R}$

(3) $x = \frac{7}{2}$, $y = -\frac{7}{2}$, $z = 1$ *e* $t = -6$

(4) Se $k \neq 0$ allora il sistema ammette una e una sola soluzione del tipo $(\frac{6}{k}, -2, \frac{5}{k})$ mentre se $k = 0$ allora il sistema è incompatibile perchè $rg(A) = 1 \neq 2 = rg(A|b)$.

(5) Se $k \neq 0, 1$ allora il sistema ammette una e una sola soluzione del tipo $(\frac{k}{k+1}, \frac{k-2}{k+1}, \frac{k}{k+1})$; se $k = 0$ allora il sistema ammette ∞^1 soluzioni del tipo $(0, t, 0)$ con $t \in \mathbb{R}$; infine se $k = -1$ il sistema è incompatibile.

(6) Se $k \neq 0, -2$ allora il sistema ammette una e una sola soluzione del tipo $(-\frac{k+4}{2k-4}, \frac{5k+2}{k(2k-4)}, \frac{3}{2k-4})$ mentre se $k = 0, -2$ il sistema è incompatibile.

Soluzione 1 *Condizione necessaria affinchè una matrice sia invertibile è che il suo determinante sia diverso da 0. Quindi per ciascuna delle seguenti matrici si calcola il determinante e nel caso in cui questo sia diverso da 0 allora $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot Cof(A)^t$ dove con $Cof(A)$ indichiamo la matrice dei cofattori di A. Nel caso in cui le matrici siano non invertibili oppure rettangolari si procede al calcolo del rango.*

Soluzione 2 *Verifichiamo i due assiomi di uno spazio affine (in questo caso su sè stesso vuol dire che $A = V$):*

(SA1) Presi $P, v \in V$ deve esistere un unico $Q \in V$ tale che $(P, Q) = v$. In questo caso $(P, Q) = Q - P = v$ quindi si ha $Q = P + v$.

(SA2) Presi $P, Q, R \in V$ si ha $(P, Q) + (Q, R) = Q - P + R - Q = R - P = (P, R)$

Nel secondo caso V non è uno spazio affine su sè stesso in quanto $(P, Q) + (Q, R) = P \cdot Q + Q \cdot R \neq P \cdot R = (P, R)$.

Soluzione 3 *Consideriamo la funzione $\delta((x, x^2), (y, y^2)) = y - x$ si verifica facilmente che A è uno spazio affine su $\mathbb{R}$.*