GE110 - Geometria 1: Tutorato 10

Docente: Angelo Felice Lopez
Tutori: Gaudenzio Falcone, Alessio Rampogna
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

17 Maggio 2018

Esercizio 1 *Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da $f(x, y, z) = (2x + 2y, x + z, x + 3y - 2z)$.*

(a) Dire se f è suriettivo. In caso contrario trovare un vettore v tale che $f^{-1}(v) = \emptyset$.

(b) Dire se f è iniettivo. In caso contrario determinare due vettori a e b con $a \neq b$ tali che $f(a) = f(b)$.

(c) Sia $U = < u, w >$ dove $u = (1, 0, 1)$ e $w = (0, 1, 1)$. Dire se il vettore $v = (4, 3, -2) \in f(U)$.

Esercizio 2 *Verificare che le seguenti applicazioni sono lineari e trovarne nucleo e immagine.*

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $(x, y, z) \mapsto (2z - x, x + y, x + 2y + 2z)$

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tale che $(x, y) \mapsto (x - 2y, 2x + y, 5y, 3x - y)$

(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $(x, y, z) \mapsto (x + y - z, x - y + z)$

Esercizio 3 *Esiste un'applicazione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $ker(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z = 2z = 0\}$?*

Esercizio 4 *Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito dalla matrice (rispetto alla base canonica)* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Calcolare la dimensione di $ker(f)$ e $Im(f)$.*

Esercizio 5 *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ nel modo seguente*

$$f(e_1) = (1, 2, 1) \quad f(e_2) = (4, 0, 1)$$

- *Esplicitare $f(x, y)$*
- *Stabilire se i vettori $(3, 4, 1)$ e $(3, -2, 0)$ appartengono a $Im(f)$.*

Esercizio 6 *Siano $\mathcal{B} = \{(1, 1, -1), (1, -1, -1), (-1, -1, -1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 1, -1), (-1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, -1), (1, 0, -1, -1)\}$ due basi rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$. Siano inoltre date le seguenti applicazioni lineari:*

- *$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $(x, y, z) \mapsto (x + z, x + 2y, 2x + 3y + z)$*
- *$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $(x, y, z) \mapsto (x + z, x + y + z, x - y + 2z, 2x + y + 2z)$*
- *$h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $(x, y, z, t) \mapsto (x + 2z + t, x - y - z + t, y - t)$*
- *$k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $(x, y, z, t) \mapsto (x + z + t, 2x + y + t, x - t - 2z + t, y - z + t)$*

Determinare $M_{\mathcal{B}}(f)$,$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g)$,$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(h)$ *e* $M_{\mathcal{B}'}(k)$.

Esercizio 7 *Sia* f *l'endomorfismo di* $\mathbb{R}^3$ *definito dalla matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}$ *con* $h \in \mathbb{R}$.

Dopo aver trovato i valori di h *per cui* f *non è suriettivo:*

- *Determinare* $Im(f)$
- *Determinare per quali valori di* $k \in \mathbb{R}$ *il vettore* $v = (1, k^2 - k, k) \in Im(f)$
- *Trovare un vettore di* $\mathbb{R}^3$ *privo di controimmagini mediante* f
- *Determinare* $ker(f)$ *e verificare che* $ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$

- *Esistono vettori* $v \in \mathbb{R}^3$ *tali che* $f(v) = (3, 2, -2)$*? E tali che* $f(v) = (1, 2, -1)$?