

Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

TUTORATO DI GE110

Anno Accademico 2017/2018

Docente: Angelo Felice Lopez

Tutori: Alessio Rampogna e Gaudenzio Falcone

Tutorato 11

24 Maggio 2018

1. Sia $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sia $F \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ tale che $F(e_2) = e_1 - e_2$ e tale che i vettori $e_1 + e_3$ e $e_3 - e_2$ siano una base per $N(F)$. Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica.
2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo associato, rispetto alla base canonica, alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ k & 2-k & 2 \end{pmatrix}$$

- Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il nucleo e l'immagine di F (esplicitando cioè una loro base).
 - Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.
 - Determinare $F^{-1}((3, -1, 2))$.
3. Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo associato alla seguente matrice rispetto alla base canonica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dire se:

- F è iniettivo
- $(1, 1, -1)$ è un autovettore di F
- $(1, 1, -1)$ è un autovalore di F
- 2 è un autovalore di F

4. Determinare l'endomorfismo F di $\mathbb{R}^2$ che soddisfi le seguenti condizioni:
- (a) $(1, 2)$ è un autovettore di F con autovalore 1.
 - (b) $(0, 1) \in N(F)$
5. Stabilire se le seguenti applicazioni sono lineari e, in caso affermativo, dire se sono suriettive e trovarne il nucleo:
- $\det : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $A \longrightarrow \det(A)$
 - $\text{tr} : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $A \longrightarrow \text{tr}(A)$
6. Siano A e B due matrici simili. Si mostri che:
- (a) $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$
 - (b) A^n e B^n sono simili per ogni $n \geq 0$.
7. Trovare gli autovalori e gli autovettori delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quali di queste matrici sono diagonalizzabili?

8. Si consideri la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Dire se A è invertibile e, in caso affermativo, trovare l'inversa;
- Calcolare gli autovalori e gli autospazi associati.