Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

TUTORATO DI GE110

Anno Accademico 2017/2018

Docente: Angelo Felice Lopez

Tutori: Alessio Rampogna e Gaudenzio Falcone

`Tutorato 1`

`06 Marzo 2018`

1. Fornire un esempio di due matrici quadrate *non nulle* di ordine 2 e 3 il cui prodotto (riga per colonna) sia la matrice nulla.

2. Sia $C \in M_2(\mathbb{C}),\ C = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix}$. Effettuare i seguenti calcoli:

   - $iC^2 + 3C + i\mathbb{I}$;
   - $3C^2 + 7C^3$;
   - C^tC.

3. Trovare per ciascuna delle seguenti matrici A una matrice M tale che:

   (i) Il prodotto riga per colonna $A \cdot M$ sia ben definito;

   (ii) $A \cdot M = 0$ (matrice nulla).

$$a = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$e = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

4. Una matrice quadrata A si dice *nilpotente di ordine* k se $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tale che $A^k = 0$. Mostrare che la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 20 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è nilpotente di ordine 3.

5. Si trovino i valori del parametro k per i quali la matrice A risulti simmetrica e la matrice B risulti antisimmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 7 & k^4 - 3k + 1 & 2 \\ k^4 + 2k - 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} k^3 + \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k & -2 & k^3 + 4k^2 + k - 8 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & k^3 - 5k^2 + 4k & 0 \end{pmatrix}$$

6. Si dimostri che l'inversa di una matrice simmetrica invertibile è ancora una matrice simmetrica.

7. Provare che se una matrice quadrata è nilpotente allora non può essere invertibile.

8. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e B una matrice tale che $AB = BA$.

   Si provi che $B = \lambda \mathbb{I}_2 + \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda, x \in \mathbb{R}$