Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

TUTORATO DI GE110

Anno Accademico 2017/2018

Docente: Angelo Felice Lopez

Tutori: Alessio Rampogna e Gaudenzio Falcone

`Tutorato 3`

`22 Marzo 2018`

1. Dire quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali e, in caso affermativo, trovarne una base.
   (a) $\{(x,0,0) : x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}$
   (b) $\{(x,y,z) : x - 7y + z = 1\}$
   (c) $\{(t,t,t) : 0 \leq t \leq 1\}$
   (d) $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,1)$
   (e) $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ dove $H_i = \{(x_1,x_2,x_3) : x_i = 0\}$
   (f) $\{(x,y,z) : x + y - 5z = 0 \wedge 2(x+y) = 0\}$
   (g) $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$
   (h) $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

2. In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\ C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\ D = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Si verifichi che l'insieme $K = \{A, B, C, D\}$ è una base dello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ e si esprima la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ nella base K.

3. Dimostrare che $GL_n(K)$ non è un sottospazio vettoriale di $M_n(K)$.

4. Sia W_1 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $a = (1,1,-1)$ e $b = (2,-1,1)$. Sia W_2 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $c = (1,2,-2)$ e $d = (-1,-1,2)$. Si determini $W_1 \cap W_2$ e una sua base.

5. In $\mathbb{R}^5$ si consideri il seguente insieme:

$$W_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 : 2x_1 + x_2 = x_3 = 0\}$$

   - Si verifichi che W_1 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$. Se ne determini una base e la dimensione.

- Sia $W_2 =< a, b, c, d >$ dove $a = (0, 3, 1, -2, 0)$, $b = (0, 0, 2, 1, 1)$, $c = (0, 6, -10, -10, -6)$ e $d = (0, 3, 7, 1, 3)$. Se ne determini una base e la dimensione.
- Provare che $\mathbb{R}^5 = W_1 \oplus W_2$.
- Si determini un sottospazio W_3 di $\mathbb{R}^5$ tale che $dim(W_1 \cap W_3) = 1$ e $dim(W_3) = 3$.

6. Siano $U =< (1, 0, \sqrt{5}, 0), (\sqrt{5}, 0, -1, 0) >$ e $W =< (0, -2, 0, 3), (0, 1, 0, 1) >$. Mostrare che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

7. Stabilire quali dei seguenti vettori sono linearmente indipendenti, quali sono un sistema di generatori dello spazio e quali sono una base:

   - In $\mathbb{R}^2$:

     (a) $\{(2, -\frac{1}{3}), (-1, \frac{1}{6})\}$

     (b) $\{(1, 2), (11, -7\sqrt{2}), (-1, -1)\}$

   - In $\mathbb{R}^3$:

     (c) $\{(1, 1, 3), (2, 2, 0), (3, 3, -3)\}$

     (d) $\{(1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 2), (-1, -2, -3)\}$

   - In $\mathbb{C}^4$:

     (e) $\{(1, 0, i, 0), (i, 0, i, 0), (0, 1, 1, 0), (0, i, 0, i)\}$