

GE110 - Geometria 1: Tutorato 4

Docente: Angelo Felice Lopez

Tutori: Gaudenzio Falcone, Alessio Rampogna

Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

29 Marzo 2018

Esercizio 1 Siano U, V due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2

- Dimostrare che $U \cap V \neq \{0\}$.
- Determinare tutte le possibili intersezioni e descrivere un esempio per ognuna di esse.

Esercizio 2 Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i seguenti sottospazi vettoriali:

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y = 2t = 0\}$$

$$K = \langle (1, 2, 0, 1), (2, 4, -1, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 4, 5), (1, -1, 0, 5) \rangle$$

- (a) Determinare la dimensione e una base per H e K .
- (b) Determinare la dimensione e una base per $H \cap K$ e $H + K$.
- (c) Il vettore $(1, 2, 3, 4)$ appartiene a $H + K$? In caso affermativo scrivere v come somma di un elemento di H e uno di K

Esercizio 3 Calcolare il rango delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4 Si determinino le componenti dei seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (3, 2, -5)$, $v_2 = (1, 0, -\frac{1}{2})$ e $v_3 = (1, 1, 1)$ rispetto alle seguenti basi:

- (a) La base canonica
- (b) $\{(1, 1, -2), (1, 0, 1), (0, 2, 1)\}$

Esercizio 5 Dire quali fra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ sono una base e si completino ad una base quelli che non lo sono:

- (a) $\{(1, 0, 8, 9), (2, 3, 4, 0), (2, 0, 1, 2), (1, 7, 5, 9)\}$
- (b) $\{(1, 0, 0, 1), (2, 3, 3, 2), (0, -1, -1, 0)\}$
- (c) $\{(h, 0, 1, 0), (1, 3, 2, 0), (1, 0, h, 0), (1, 3h, 2h, 0)\}$ al variare di $h \in \mathbb{R}$

Esercizio 6 In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i vettori $a = (1, 1, 1, 0)$, $b = (0, 1, 1, 1)$ e $c = (1, 1, 0, 0)$

- Verificare che a, b e c sono linearmente indipendenti e completare ad una base di $\mathbb{R}^4$.

- Dire se il sottospazio $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = 2z + t = 0\}$ nel sottospazio $K = \langle a, b, c \rangle$.

Esercizio 7 Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i seguenti sottospazi:

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z = x + y - t = 0\}$$

$$K = \langle (0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0) \rangle$$

Determinare la dimensione e una base di $H + K$. Tale somma è diretta?