UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2022-2023

Prova scritta del 13-9-2023

TESTO E SOLUZIONI

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 - X_2 + kX_4 = 1 \\ -X_1 + kX_2 + X_3 = 2 \\ -X_1 + (2k+2)X_2 + X_3 + (1-k)X_4 = k \end{cases}.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile.

(b) Per i valori di k per i quali il sistema è compatibile, calcolare esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

(a) Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & k & 1 \\ -1 & k & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2k+2 & 1 & 1-k & k \end{pmatrix}.$$

Con le operazioni $R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_1, R_2 \to R_3 + \frac{1}{2}R_1, R_4 \to R_4 + \frac{1}{2}R_1$ si trova

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & k - \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & k + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 2k + \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} - k & k \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_2 \to 2R_2, R_3 \to 2R_3, R_4 \to 2R_4$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2k-1 & 2 \\ 0 & 2k+1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4k+5 & 1 & 3-2k & 2k \end{pmatrix}$$

e con le operazioni $R_3 \to R_3 + \frac{2k+1}{3}R_2, R_4 \to R_4 + \frac{4k+5}{3}R_2$, si trova

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2k-1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{2k+4}{3} & \frac{4k^2+2}{3} & \frac{4k+14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4k+8}{3} & \frac{8k^2+4}{3} & \frac{14k+10}{3} \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_3 \to 3R_3, R_4 \to 3R_4$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2k-1 & 2 \\ 0 & 0 & 2k+4 & 4k^2+2 & 4k+14 \\ 0 & 0 & 4k+8 & 8k^2+4 & 14k+10 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_4 \to R_4 - 2R_3$ da la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2k-1 & 2 \\ 0 & 0 & 2k+4 & 4k^2+2 & 4k+14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6k-18 \end{pmatrix}.$$

Se $6k - 18 \neq 0$, ovvero se $k \neq 3$, il sistema è palesemente incompatibile.

Invece, se $k = 3$, si ha

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 38 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

il sistema è a gradini, quindi compatibile.

Dunque il sistema è compatibile se e solo se $k = 3$.

(b) Se $k = 3$, da B, si ottiene

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ -3X_2 + X_3 + 5X_4 = 2 \\ 10X_3 + 38X_4 = 26 \end{cases}.$$

Posto $X_4 = t$, risolvendo otteniamo la soluzione

$$X_1 = \frac{6-13t}{5},\ X_2 = \frac{2t+1}{5},\ X_3 = \frac{13-19t}{5},\ X_4 = t, t \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U_k il sottospazio vettoriale

$$U_k = \langle (0,k,1,k), (1,0,1,0), (1,1,-k,0) \rangle$$

e W_k il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$W_k : \begin{cases} X_1 + kX_2 = 0 \\ kX_2 - kX_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino le dimensioni di U_k, W_k e si scriva esplicitamente una base di tali sottospazi.

(b) Si determinino le dimensioni di $W_k + U_k$ e di $W_k \cap U_k$.

(c) Si determinino tutti i valori di k (se esistono) per i quali c'è un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$V \oplus U_k = V \oplus W_k = \mathbb{R}^4.$$

SOLUZIONE:

(a) La matrice dei generatori di U_k è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -k & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $\begin{vmatrix} 0 & k & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{vmatrix} = k^2 + k + 1 = 0$ e $\begin{vmatrix} 0 & k & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k$. Dato che questi due minori non si annullano simultaneamente, per il principio dei minori orlati, $\dim U_k = r(A) = 3$ e una base di U_k sarà $\{(0,k,1,k),(1,0,1,0),(1,1,-k,0)\}$.

Ora vediamo W_k.

Se $k=0$, l'equazione di W_0 è $X_1 = 0$, quindi $\dim W_0 = 3$ e una sua base è $\{E_2, E_3, E_4\}$.

Se $k \neq 0$, posto $X_3 = s, X_4 = t$ abbiamo che un vettore di W_k è del tipo

$$(-kt, t, s, t) = t(-k,1,0,1) + s(0,0,1,0).$$

Pertanto, se $k \neq 0$, W_k ha dimensione 2 con base $\{(-k,1,0,1), E_3\}$.

(b) Per calcolare $W_k + U_k$, consideriamo la matrice dei loro generatori. Se $k=0$ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La sottomatrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante 1, quindi

$$\dim(W_0 + U_0) = r(A) = 4$$

e dalla formula di Grassmann si deduce che

$$\dim(U_0 \cap W_0) = \dim U_0 + \dim W_0 - \dim(U_0 + W_0) = 2.$$

Se $k \neq 0$ la matrice dei generatori di $W_k + U_k$ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -k & 0 \\ -k & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La sottomatrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -k & 0 \\ -k & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante -1, quindi

$$\dim(W_k + U_k) = r(A) = 4$$

e dalla formula di Grassmann si deduce che

$$\dim(U_k \cap W_k) = \dim U_k + \dim W_k - \dim(U_k + W_k) = 1.$$

(c) Supponiamo che V esista. Si deduce che

$$\dim V + \dim U_k = \dim V + \dim W_k = 4$$

da cui, $\dim V = 1, \dim W_k = 3$ e quindi $k = 0$. Ora mostriamo che, per $k = 0$ un tale V esiste. Sia $V = \langle E_1 + E_4 \rangle$. Dato che $E_1 + E_4 \notin W_0$ (che ha equazione $X_1 = 0$), è chiaro che $V \oplus W_0 = \mathbb{R}^4$. Inoltre anche $V \oplus U_0 = \mathbb{R}^4$ dato che la matrice dei generatori di $V + U_0$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 4.

Se ne deduce che V esiste se e solo se $k = 0$. ■

3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $v = e_1 + e_4$. Sia F un endomorfismo di V tale che $v \in N(F + \mathrm{Id}_V)$ e

$$F(e_4) = e_4, F(e_3 - v) = -e_2 + ke_3, F(e_2 + e_3 + e_4 - v) = (k+1)e_3 + 2e_4.$$

(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, scelto un valore di k e individuato un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Dato che $v \in N(F+\mathrm{Id}_V)$, abbiamo che $0 = (F+\mathrm{Id}_V)(v) = F(v)+v$, da cui $F(v) = -v$. Quindi conviene scegliere una base che contenga v, per esempio $e = \{v, e_4, e_2+e_4, e_3-v\}$: infatti si tratta di una base dato che

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Scriviamo la matrice di F nella base e. Abbiamo già $F(v) = -v$ e $F(e_4) = e_4$ espressi nella base e. Invece

$$F(e_3-v) = -e_2+ke_3 = av+be_4+c(e_2+e_4)+d(e_3-v) = (a-d)e_1+ce_2+de_3+(a+b+c-d)e_4$$

e uguagliando le due espressioni otteniamo

$$\begin{cases} a-d=0 \\ c=-1 \\ d=k \\ a+b+c-d=0 \end{cases}$$

che ha soluzione $a=k, b=1, c=-1, d=k$. Infine

$$F(e_2+e_4) = (k+1)e_3+2e_4-F(e_3-v) = e_2+e_3+2e_4 = av+be_4+c(e_2+e_4)+d(e_3-v) =$$

$$= (a-d)e_1+ce_2+de_3+(a+b+c-d)e_4$$

e uguagliando le due espressioni otteniamo

$$\begin{cases} a-d=0 \\ c=1 \\ d=1 \\ a+b+c-d=2 \end{cases}$$

che ha soluzione $a=1, b=1, c=1, d=1$. Pertanto la matrice di F nella base e è

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & k \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

ed il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 0 & 1 & k \\ 0 & 1-T & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-T & -1 \\ 0 & 0 & 1 & k-T \end{vmatrix} = (T-1)(T+1)[T^2-(k+1)T+k+1].$$

Osserviamo che $T^2-(k+1)T+k+1=0$ ha soluzioni $\frac{k+1\pm\sqrt{k^2-2k-3}}{2}$ se e solo se $k \leq -1$ o $k \geq 3$. Inoltre, se $k \leq -1$ o $k \geq 3$,

$$\frac{k+1\pm\sqrt{k^2-2k-3}}{2} = 1$$

non ha soluzioni, mentre

$$\frac{k+1\pm\sqrt{k^2-2k-3}}{2} = -1 \text{ se e solo se } k = -\frac{3}{2}.$$

Dunque

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$-1 < k < 3$	$\lambda_1 = -1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1$ (m.a. 1)
$k < -\frac{3}{2}$ o $-\frac{3}{2} < k < -1$ o $k > 3$	$\lambda_1 = -1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \frac{k+1-\sqrt{k^2-2k-3}}{2}$ (m.a. 1), $\lambda_4 = \frac{k+1+\sqrt{k^2-2k-3}}{2}$ (m.a. 1)
$k = -\frac{3}{2}$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = -1$ (m.a. 2), $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ (m.a. 1)
$k = -1$	$\lambda_1 = -1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_3 = 0$ (m.a. 2)
$k = 3$	$\lambda_1 = -1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_3 = 2$ (m.a. 2)

(b) Le dimensioni degli autospazi di F saranno sempre 1 nei casi in cui la molteplicità algebrica è 1. Se $k=-1$ consideriamo $\lambda_3 = 0$ e calcoliamo la base dell'autospazio $V_0(F)$. Si ha

$$(M_e(F) - 0I_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0$$

se e solo se

$$\begin{cases} -x+z-w=0 \\ y+z+w=0 \\ z-w=0 \\ z-w=0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $x=0, y=-2w, z=w$, da cui gli autovettori di F associati all'autovalore 0 sono tutti del tipo $0v-2we_4+w(e_2+e_4)+w(e_3-v) = w(-e_1+e_2+e_3-2e_4)$. Ne segue che una base di $V_0(F)$ è $\{-e_1+e_2+e_3-2e_4\}$ e $\dim V_0(F) = 1$.

Se $k = -\frac{3}{2}$ abbiamo che

$$\text{m.g.}(-1) = 4 - r(A + I_4) = 4 - r(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}) = 1.$$

Se $k = 3$ abbiamo che

$$\text{m.g.}(2) = 4 - r(A - 2I_4) = 4 - r(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}) = 1.$$

(c) Dalla (a) e (b) deduciamo che F è diagonalizzabile se e solo se $k < -\frac{3}{2}$ o $-\frac{3}{2} < k < -1$ o $k > 3$. ■

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia **A** uno spazio affine di dimensione 4 e sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine con coordinate X, Y, Z, W. Sia T_k il sottospazio di equazioni cartesiane

$$T_k : \begin{cases} X + Y = 1 \\ X - kY + kW = 1 \end{cases}$$

e sia S_k il sottospazio di equazioni parametriche

$$S_k : \begin{cases} X = -t + s \\ Y = k + t + s \\ Z = t - s \\ W = ks \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare per quali k si ha che S_k e T_k sono sghembi.

(b) Determinare (se esistono) le rette r di **A** passanti per O, parallele a T_k e non parallele a S_k.

(c) Determinare se esistono piani p di **A** tale che p è parallelo a S_k ed è incidente con T_k.

SOLUZIONE:

La giacitura di S_k si ottiene dalle equazioni parametriche ed è $\langle(-1, 1, 1, 0), (1, 1, -1, k)\rangle$, ovvero $\langle -e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 - e_3 + ke_4\rangle$.

La giacitura di T_k si ottiene dalle soluzioni del sistema omogeneo associato

$$(*) \ \begin{cases} X + Y = 0 \\ X - kY + kW = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $X = -v, Y = v, Z = u, W = 0$ se $k = -1$ e $X = -\frac{kv}{k+1}, Y = \frac{kv}{k+1}, Z = u, W = v$ se $k \neq -1$, dove $u, v \in \mathbb{R}$. Quindi la giacitura di T_k è $\langle -e_1 + e_2, e_3\rangle$ se $k = -1$ e $\langle -ke_1 + ke_2 + (k + 1)e_4, e_3\rangle$ se $k \neq -1$.

Notiamo anche che sia S_k che T_k sono piani per ogni k.
(a) Calcoliamo $S_k \cap T_k$. Sostituendo nelle equazioni di T_k abbiamo il sistema

$$\begin{cases} -t+s+k+t+s=1 \\ -t+s-k(k+t+s)+k^2 s=1 \end{cases}$$

ovvero

$$(**)\quad \begin{cases} s=\frac{1-k}{2} \\ -(k+1)t+\frac{1-k}{2}(1-k+k^2)=k^2+1. \end{cases}$$

Se $k \neq -1$ il sistema ha un'unica soluzione, quindi $S_k \cap T_k$ è un punto, quindi non sono sghembi. Inoltre, sempre se $k \neq -1$, S_k e T_k non sono paralleli, altrimenti, dato che si intersecano ed hanno la stessa dimensione, coinciderebbero e quindi l'intersezione sarebbe un piano.
Invece, se $k=-1$, si vede subito che il sistema $(**)$ è incompatibile, quindi $S_k \cap T_k = \emptyset$. Inoltre $(1,1,-1,-1) \in \mathrm{giac(S_k)}$ non soddisfa $(*)$, quindi anche in questo caso S_{-1} e T_{-1} non sono paralleli, altrimenti le giaciture coinciderebbero e quindi $(1,1,-1,-1)$ dovrebbe soddisfare $(*)$. Se ne deduce che S_{-1} e T_{-1} sono sghembi.
Dunque S_k e T_k sono sghembi se e solo se $k=-1$.
(b) Segue da (a) che, per ogni k, $\mathrm{giac(T_k)} \not\subseteq \mathrm{giac(S_k)}$: infatti se fosse, $\mathrm{giac(T_k)} \subseteq \mathrm{giac(S_k)}$, allora, avendo la stessa dimensione, $\mathrm{giac(T_k)} = \mathrm{giac(S_k)}$, ovvero S_k e T_k sarebbero paralleli, contraddicendo quanto mostrato in (a). Dunque $\mathrm{giac(T_k)} \not\subseteq \mathrm{giac(S_k)}$ e pertanto esiste un vettore non nullo $v \in \mathrm{giac(T_k)} \setminus \mathrm{giac(S_k)}$. Allora la retta r di $\mathbf{A}$ passante per O e di giacitura $\langle v \rangle$ è parallela a T_k e non è parallela a S_k.
Quindi una tale r esiste per ogni $k \in \mathbb{R}$.
(c) Sia $Q \in T_k$ e sia p il piano di $\mathbf{A}$ passante per Q e di giacitura $\mathrm{giac(S_k)}$. Allora p è parallelo a S_k e p non è parallelo a T_k, altrimenti anche S_k lo sarebbe. Inoltre $p \cap T_k$ contiene Q, quindi p è incidente con T_k.
Quindi un tale p esiste per ogni $k \in \mathbb{R}$ $\blacksquare$.