UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2022-2023

Prova scritta del 13-9-2023

TESTO

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 - X_2 + kX_4 = 1 \\ -X_1 + kX_2 + X_3 = 2 \\ -X_1 + (2k+2)X_2 + X_3 + (1-k)X_4 = k \end{cases}.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile.

(b) Per i valori di k per i quali il sistema è compatibile, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U_k il sottospazio vettoriale

$$U_k = \langle (0, k, 1, k), (1, 0, 1, 0), (1, 1, -k, 0) \rangle$$

e W_k il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$W_k : \begin{cases} X_1 + kX_2 = 0 \\ kX_2 - kX_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino le dimensioni di U_k, W_k e si scriva esplicitamente una base di tali sottospazi.

(b) Si determinino le dimensioni di $W_k + U_k$ e di $W_k \cap U_k$.

(c) Si determinino tutti i valori di k (se esistono) per i quali c'è un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$V \oplus U_k = V \oplus W_k = \mathbb{R}^4.$$

3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $v = e_1 + e_4$. Sia F un endomorfismo di V tale che $v \in N(F + \mathrm{Id}_V)$ e

$$F(e_4) = e_4, F(e_3 - v) = -e_2 + ke_3, F(e_2 + e_3 + e_4 - v) = (k+1)e_3 + 2e_4.$$

(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, scelto un valore di k e individuato un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 4 e sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine con coordinate X, Y, Z, W. Sia T_k il sottospazio di equazioni cartesiane

$$T_k : \begin{cases} X + Y = 1 \\ X - kY + kW = 1 \end{cases}$$

e sia S_k il sottospazio di equazioni parametriche

$$S_k : \begin{cases} X = -t + s \\ Y = k + t + s \\ Z = t - s \\ W = ks \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare per quali k si ha che S_k e T_k sono sghembi.

(b) Determinare (se esistono) le rette r di $\mathbf{A}$ passanti per O, parallele a T_k e non parallele a S_k.

(c) Determinare se esistono piani p di $\mathbf{A}$ tale che p è parallelo a S_k ed è incidente con T_k.