UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2022-2023

Prova scritta del 16-6-2023

TESTO E SOLUZIONI

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + kX_4 = -1 \\ X_1 + X_3 + kX_4 = 0 \\ -X_1 + X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 + X_2 - kX_3 = 1 \end{cases}.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile.

(b) Per i valori di k per i quali il sistema è compatibile, calcolare esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

(a) Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k & -1 \\ 1 & 0 & 1 & k & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -k & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_3 si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui le operazioni $R_2 \to R_2 + R_1, R_3 \to R_3 + R_1, R_4 \to R_4 + R_1$ danno

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & k-1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & k-1 & -1 \\ 0 & 1 & 1-k & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, cambiando R_2 con R_3 si trova

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & k-1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & k-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-k & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_4 \to R_4 - R_2$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & k-1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & -k-1 & -k & 2 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \to R_4 + \frac{k+1}{2} R_3$, abbiamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & k-1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k^2-2k-1}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Se $\frac{k^2-2k-1}{2} = 0$, ovvero se $k = 1 \pm \sqrt{2}$, il sistema è incompatibile.
Invece, se $k \neq 1 \pm \sqrt{2}$, il sistema è a gradini, quindi compatibile.
Dunque il sistema è compatibile se e solo se $k \neq 1 \pm \sqrt{2}$.
(b) In tal caso, da B, si ottiene

$$\begin{cases} -X_1 + X_3 - X_4 = 0 \\ X_2 + 2X_3 + (k-1)X_4 = -1 \\ 2X_3 + (k-1)X_4 = 0 \\ \frac{k^2-2k-1}{2} X_4 = 2 \end{cases}$$

e risolvendo otteniamo la soluzione

$$X_1 = -\frac{2(k+1)}{k^2-2k-1},\ X_2 = -1,\ X_3 = -\frac{2(k-1)}{k^2-2k-1}, X_4 = \frac{4}{k^2-2k-1}. \quad \blacksquare$$

2. Siano k un numero reale, $v_k = (1, 0, -1, k) \in \mathbb{R}^4$, $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$V : \begin{cases} X + Y = 0 \\ X + Y - Z + W = 0 \end{cases}$$

e $U_k \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale

$$U_k = \langle (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, -1, k, 0) \rangle.$$

(a) Determinare le dimensioni di U_k e di $V + (U_k \cap \langle v_k \rangle)$ e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.
(b) Determinare le dimensioni di $U_k + (V + \langle v_k \rangle)$ e di $U_k \cap (V + \langle v_k \rangle)$;

(c) Determinare se esiste un sottospazio F di $\mathbb{R}^4$ e dei valori di k per i quali

$$U_k \oplus F = V \oplus F = \mathbb{R}^4.$$

SOLUZIONE:

(a) Un vettore di V soddisfa $X = -Y, Z = W$, dunque è del tipo

$$(-Y, Y, W, W) = Y(-1, 1, 0, 0) + W(0, 0, 1, 1).$$

Pertanto V ha dimensione 2 con base $\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$.
Per U_k si verifica facilmente che il rango di

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

è 2 se $k = 2$ ed è 3 se $k \neq 2$. Pertanto, se $k = 2$, $\dim U_2 = 2$ e $\{(1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$ ne è una base; mentre se $k \neq 2$, $\dim U_k = 3$ e $\{(1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, -1, k, 0)\}$ ne è una base.
Per calcolare $U_k \cap \langle v_k \rangle$ consideriamo la matrice associata a $U_k + \langle v_k \rangle$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & k & 0 \\ 1 & 0 & -1 & k \end{pmatrix}.$$

Intanto $\det A = k(k-2)$ quindi, se $k \neq 0, 2$, si ha che $\dim(U_k + \langle v_k \rangle) = 4$, dunque $v_k \notin U_k$, da cui $U_k \cap \langle v_k \rangle = \{0\}$. Analogamente, se $k = 2$ si vede subito che $\dim(U_2 + \langle v_2 \rangle) = r(A) = 3$, dunque $v_2 \notin U_2$, da cui $U_2 \cap \langle v_2 \rangle = \{0\}$. Infine, se $k = 0$, si vede subito che $\dim(U_0 + \langle v_0 \rangle) = r(A) = 3$, dunque $v_0 \in U_0$, da cui $U_0 \cap \langle v_0 \rangle = \langle v_0 \rangle$.
Quindi, se $k \neq 0$ abbiamo che $U_k \cap \langle v_k \rangle = \{0\}$, e quindi $V + (U_k \cap \langle v_k \rangle) = V$. Invece, se $k = 0$ allora $V + (U_0 \cap \langle v_0 \rangle) = V + \langle v_0 \rangle$ e la matrice corrispondente è

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3. Pertanto $\dim(V + (U_0 \cap \langle v_0 \rangle)) = 3$ e una sua base è

$$\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, -1, 0)\}.$$

(b) In $U_k + (V + \langle v_k \rangle)$ ci sono sicuramente i quattro vettori $(1,0,1,0),(1,1,0,0) \in U_k$ e $(-1,1,0,0),(0,0,1,1) \in V$. La loro matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ed ha rango 4, quindi $\dim(U_k + (V + \langle v_k \rangle)) = 4$ per ogni k. Inoltre la matrice di $V + \langle v_k \rangle$ è

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & k \end{pmatrix}$$

ed ha rango 3, quindi $\dim(V + \langle v_k \rangle) = 3$. Dalla formula di Grassmann si deduce che

$$\dim(U_k \cap (V + \langle v_k \rangle)) = \dim U_k + \dim(V + \langle v_k \rangle) - \dim(U_k + (V + \langle v_k \rangle)) =$$

$$= \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 2 \\ 2 & \text{se } k = 2 \end{cases} + 3 - 4 = \begin{cases} 2 & \text{se } k \neq 2 \\ 1 & \text{se } k = 2 \end{cases}.$$

(c) Se F esiste, allora $\dim U_k + \dim F = \dim V + \dim F = 4$, da cui, essendo $\dim V = 2$, deduciamo che $\dim F = \dim U_k = 2$ e quindi che $k = 2$. E per $k = 2$ un tale F esiste: per esempio $F = \langle E_1, E_4 \rangle$, da le seguenti matrici, rispetto alle basi di U_2 e V:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che hanno entrambe rango 4. Pertanto $\dim(U_2 + F) = \dim(V + F) = 4$ e la formula di Grassmann da $\dim(U_2 \cap F) = 2 + 2 - 4 = 0, \dim(V \cap F) = 2 + 2 - 4 = 0$. Quindi $U_2 \oplus F = V \oplus F = \mathbb{R}^4$. Se ne deduce che F esiste se e solo se $k = 2$. ■

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e sia F un endomorfismo di V tale che $e_4 \in N(F)$ e

$$F(e_1 + 2e_2) = 2e_1 + 2ke_2 + 4e_3 + ke_4, F(e_2 - e_3) = (k-1)e_2 + e_3, F(e_1) = 2e_1 + ke_4.$$

(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.
(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, scelto un valore di k e individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Scriviamo la matrice di F nella base $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Abbiamo $F(e_4) = 0$ e

$$2e_1 + ke_4 + 2F(e_2) = F(e_1) + 2F(e_2) = F(e_1 + 2e_2) = 2e_1 + 2ke_2 + 4e_3 + ke_4$$

da cui deduciamo che

$$F(e_2) = ke_2 + 2e_3 \text{ e } F(e_3) = F(e_2) - (k-1)e_2 - e_3 = e_2 + e_3.$$

Pertanto la matrice di F nella base e è

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ed il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k-T & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1-T & 0 \\ k & 0 & 0 & -T \end{vmatrix} = T(T-2)[T^2 - (k+1)T + k - 2]$$

e gli autovalori di F sono $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$ e, dato che $k^2 - 2k + 9 > 0$ per ogni k, $\frac{1}{2}(k + 1 \pm \sqrt{k^2 - 2k + 9})$. Osserviamo che

$$\frac{1}{2}(k + 1 \pm \sqrt{k^2 - 2k + 9}) = 0$$

se e solo se scegliamo $-$ e $k = 2$, mentre

$$\frac{1}{2}(k + 1 \pm \sqrt{k^2 - 2k + 9}) = 2$$

se e solo se scegliamo $+$ e $k = 0$. Dunque

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k = 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 2$ (m.a. 2), $\lambda_3 = -1$ (m.a. 1)
$k = 2$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2), $\lambda_2 = 2$ (m.a. 1), $\lambda_3 = 3$ (m.a. 1)
$k \neq 0, 2$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 2$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \frac{1}{2}(k + 1 - \sqrt{k^2 - 2k + 9})$ (m.a. 1),
	$\lambda_4 = \frac{1}{2}(k + 1 + \sqrt{k^2 - 2k + 9})$ (m.a. 1)

(b) Le dimensioni degli autospazi di F saranno sempre 1 nei casi in cui la molteplicità algebrica è 1. Se $k = 0$ consideriamo $\lambda_2 = 2$ e sia

$$A = M_e(F) - 2I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

per cui $\dim V_2(F) = 4 - r(A) = 2$.
Se $k = 2$ consideriamo $\lambda_1 = 0$ e calcoliamo la base dell'autospazio $V_0(F) = N(F)$. Si ha

$$M_e(F) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0$$

se e solo se

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $x = 0, z = -2y$, da cui gli autovettori di F associati all'autovalore 0 sono tutti del tipo $ye_2 - 2ye_3 + we_4 = y(e_2 - 2e_3) + we_4$. Ne segue che una base di $V_0(F)$ è $\{e_2 - 2e_3, e_4\}$ e $\dim V_0(F) = 2$.
(c) Osserviamo da (a) e (b) che, in tutti i casi, la somma delle molteplicità geometriche è sempre 4. Se ne conclude che F è diagonalizzabile per ogni $k \in \mathbb{R}$. ■
4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 4 e sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine con coordinate X, Y, Z, W. Sia T_k il sottospazio di equazione cartesiana

$$T_k : X - Y + Z + kW = 1$$

e sia S_k il sottospazio di equazioni parametriche

$$S_k : \begin{cases} X = t + ks \\ Y = 1 + t + ks \\ Z = t \\ W = 1 - ks \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare per quali valori di k esiste un piano p in $\mathbf{A}$ tale che p è parallelo sia a T_k che a S_k.
(b) Determinare (se esistono) le rette r di $\mathbf{A}$ passanti per $Q = Q(1, 0, 0, 0)$ e parallele sia a T_k che a S_k.
(c) Determinare se esistono rette r di $\mathbf{A}$ tale che r è parallela a T_k ed è sghemba con S_k.

SOLUZIONE:

Calcoliamo le giaciture di T_k e S_k.

La giacitura di T_k è data dalle soluzioni del sistema omogeneo $X - Y + Z + kW = 0$, che quindi sono

$$(X, Y, Z, W) = (X, Y, -X + Y - kW, W) = X(1, 0 - 1, 0) + Y(0, 1, 1, 0) + W(0, 0, -k, 1).$$

Pertanto

$$\mathrm{giac}(T_k) = \langle e_1 - e_3, e_2 + e_3, -ke_3 + e_4\rangle$$

e T_k ha dimensione 3.

Dalle equazioni parametriche di S_k deduciamo che

$$\mathrm{giac}(S_k) = \langle e_1 + e_2 + e_3, k(e_1 + e_2 - e_4)\rangle = \begin{cases} \langle e_1 + e_2 + e_3\rangle & \text{se } k = 0 \\ \langle e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 - e_4\rangle & \text{se } k \neq 0 \end{cases}.$$

In particolare S_k è un piano se $k \neq 0$, mentre è una retta se $k = 0$.

Osserviamo anche che, in ogni caso,

$$(*) \quad \mathrm{giac}(S_k) \nsubseteq \mathrm{giac}(T_k)$$

in quanto il vettore $e_1 + e_2 + e_3 \in \mathrm{giac}(S_k)$ ha coordinate $(1, 1, 1, 0)$ che non soddisfano l'equazione $X - Y + Z + kW = 0$ della giacitura di T_k.

(a) Supponiamo che esista un piano p in $\mathbf{A}$ tale che p è parallelo sia a T_k che a S_k. Allora $\mathrm{giac}(p) \subseteq \mathrm{giac}(T_k)$. Inoltre o $\mathrm{giac}(p) \subseteq \mathrm{giac}(S_k)$, e quindi $k \neq 0$ e $\mathrm{giac}(p) = \mathrm{giac}(S_k)$, oppure $\mathrm{giac}(S_k) \subseteq \mathrm{giac}(p)$. In entrambi i casi si ha che $\mathrm{giac}(S_k) \subseteq \mathrm{giac}(p)$ e quindi $\mathrm{giac}(S_k) \subseteq \mathrm{giac}(T_k)$, contraddicendo $(*)$. Dunque un tale piano p non esiste.

(b) Supponiamo che esista una retta r di $\mathbf{A}$ parallela sia a T_k che a S_k. Allora $\mathrm{giac}(r) \subseteq \mathrm{giac}(T_k)$. Se $\mathrm{giac}(S_k) \subseteq \mathrm{giac}(r)$, allora $\mathrm{giac}(S_k) \subseteq \mathrm{giac}(T_k)$, contraddicendo $(*)$. Quindi resta il caso $\mathrm{giac}(r) \subset \mathrm{giac}(S_k), \mathrm{giac}(r) \neq \mathrm{giac}(S_k)$. Allora $k \neq 0$ e si ha $\mathrm{giac}(r) \subseteq \mathrm{giac}(T_k) \cap \mathrm{giac}(S_k)$, da cui

$$\dim(\mathrm{giac}(T_k) \cap \mathrm{giac}(S_k)) \geq 1.$$

Viceversa, se $k \neq 0$ e $\dim(\mathrm{giac}(T_k) \cap \mathrm{giac}(S_k)) \geq 1$, allora preso un vetttore non nullo $v \in \mathrm{giac}(T_k) \cap \mathrm{giac}(S_k)$, la retta r passante per Q di giacitura $\langle v\rangle$ sarà tale che r è parallela sia a T_k che a S_k.

Ora la formula di Grassmann implica, per $k \neq 0$, che

$$\dim(\text{giac}(T_k) \cap \text{giac}(S_k)) = 3 + 2 - \dim(\text{giac}(T_k) + \text{giac}(S_k)) \geq 5 - 4 = 1$$

quindi ne concludiamo che r esiste se e solo se $k \neq 0$.
(c) Sia $v = e_1 - e_3$ e prendiamo come giacitura di r il sottospazio $\langle v \rangle \subset \text{giac}(T_k)$, in modo che r è parallela a T_k. Osserviamo anche che $v \notin \text{giac}(S_k)$, in quanto o $k = 0$ e $\text{giac}(S_k) = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$ non contiene v, oppure $k \neq 0$ e ancora $\text{giac}(S_k) = \langle e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 - e_4 \rangle$ non contiene v, dato che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3. Quindi r non è parallela a S_k. Occorre ora scegliere un punto $R = R(a, b, c, d)$ in modo che la retta r passante per R e di giacitura $\langle v \rangle$ non intersechi S_k. Imposto ciò, r sarà sghemba con S_k. Le equazioni parametriche di r sono:

$$r : \begin{cases} X = a + u \\ Y = b \\ Z = c - u \\ W = d \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

Per vedere $r \cap S_k$ consideriamo il sistema dell'intersezione

$$\begin{cases} a + u = t + ks \\ b = 1 + t + ks \\ c = t \\ d = 1 - ks \end{cases}$$

che implica $t = c, ks = 1 - d$ e $b = 2 + c - d$. Pertanto se prendiamo per esempio $R = R(0, 0, 0, 0)$, tale condizione non è soddisfatta e quindi $r \cap S_k = \emptyset$.
Se ne conclude che per ogni $k \in \mathbb{R}$ esistono rette r di $\mathbf{A}$ tale che r è parallela a T_k ed è sghemba con S_k. ■