UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2022-2023

Prova scritta del 16-6-2023

TESTO

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + kX_4 = -1 \\ X_1 + X_3 + kX_4 = 0 \\ -X_1 + X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 + X_2 - kX_3 = 1 \end{cases}.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile.

(b) Per i valori di k per i quali il sistema è compatibile, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Siano k un numero reale, $v_k = (1, 0, -1, k) \in \mathbb{R}^4$, $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$V : \begin{cases} X + Y = 0 \\ X + Y - Z + W = 0 \end{cases}$$

e $U_k \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale

$$U_k = \langle (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0),\ (1, -1, k, 0) \rangle.$$

(a) Determinare le dimensioni di U_k e di $V + (U_k \cap \langle v_k \rangle)$ e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.

(b) Determinare le dimensioni di $U_k + (V + \langle v_k \rangle)$ e di $U_k \cap (V + \langle v_k \rangle)$;

(c) Determinare se esiste un sottospazio F di $\mathbb{R}^4$ e dei valori di k per i quali

$$U_k \oplus F = V \oplus F = \mathbb{R}^4.$$

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e sia F un endomorfismo di V tale che $e_4 \in N(F)$ e

$$F(e_1 + 2e_2) = 2e_1 + 2ke_2 + 4e_3 + ke_4, F(e_2 - e_3) = (k - 1)e_2 + e_3, F(e_1) = 2e_1 + ke_4.$$

(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, scelto un valore di k e individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.
(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.
4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 4 e sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine con coordinate X, Y, Z, W. Sia T_k il sottospazio di equazione cartesiana

$$T_k : X - Y + Z + kW = 1$$

e sia S_k il sottospazio di equazioni parametriche

$$S_k : \begin{cases} X = t + ks \\ Y = 1 + t + ks \\ Z = t \\ W = 1 - ks \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare per quali valori di k esiste un piano p in $\mathbf{A}$ tale che p è parallelo sia a T_k che a S_k.
(b) Determinare (se esistono) le rette r di $\mathbf{A}$ passanti per $Q = Q(1, 0, 0, 0)$ e parallele sia a T_k che a S_k.
(c) Determinare se esistono rette r di $\mathbf{A}$ tale che r è parallela a T_k ed è sghemba con S_k.