UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2022-2023

Prova scritta del 18-7-2023

TESTO E SOLUZIONI

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} 2X_1 - 2X_2 + kX_3 = 2 \\ -2X_1 + kX_2 + 2X_3 = 0 \\ -4X_2 + 2X_3 = 1 \\ -2X_1 + (2k-6)X_2 + (k+6)X_3 = 3 \end{cases}.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile.

(b) Per i valori di k per i quali il sistema è compatibile, calcolare esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

(a) Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & k & 2 \\ -2 & k & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ -2 & 2k-6 & k+6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Con le operazioni $R_2 \to R_2 + R_1, R_4 \to R_4 + R_1$ si trova

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & k & 2 \\ 0 & k-2 & k+2 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 2k-8 & 2k+6 & 5 \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_2 con R_3 si ottiene

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & k & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & k-2 & k+2 & 2 \\ 0 & 2k-8 & 2k+6 & 5 \end{pmatrix}$$

e con le operazioni $R_3 \to R_3 + \frac{k-2}{4}R_2, R_4 \to R_4 + \frac{k-4}{2}R_2$, si trova

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & k & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3k+2}{2} & \frac{k+6}{4} \\ 0 & 0 & 3k+2 & \frac{k+6}{2} \end{pmatrix}$$

l'operazione $R_4 \to R_4 - 2R_3$ da la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & k & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3k+2}{2} & \frac{k+6}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $\frac{3k+2}{2} = 0$, ovvero se $k = -\frac{2}{3}$, il sistema è incompatibile in quanto $\frac{k+6}{4} = \frac{4}{3} \neq 0$.
Invece, se $k \neq -\frac{2}{3}$, il sistema è a gradini, quindi compatibile.
Dunque il sistema è compatibile se e solo se $k \neq -\frac{2}{3}$.
(b) In tal caso, da B, si ottiene

$$\begin{cases} 2X_1 - 2X_2 + kX_3 = 2 \\ -4X_2 + 2X_3 = 1 \\ \frac{3k+2}{2} X_3 = \frac{k+6}{4} \end{cases}$$

e risolvendo otteniamo la soluzione

$$X_1 = \frac{-k^2 + 4k + 12}{4(3k+2)}, \; X_2 = \frac{2-k}{2(3k+2)}, \; X_3 = \frac{k+6}{2(3k+2)}. \qquad \blacksquare$$

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U_k il sottospazio vettoriale

$$U_k = \langle (1,k,1,0), (k,0,1,0), (1,1,-1,0) \rangle$$

e W_k il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_4 = 0 \\ X_2 - kX_3 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino le dimensioni di U_k, W_k e si scriva esplicitamente una base di tali sottospazi.
(b) Si determinino le dimensioni di $W_k + U_k$ e di $W_k \cap U_k$.
(c) Si determinino tutti i valori di k (se esistono) per i quali c'è un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$V \oplus U_k = \mathbb{R}^4 \text{ e } W_k \cap U_k \subset V, W_k \cap U_k \neq V.$$

SOLUZIONE:

(a) La matrice dei generatori di U_k è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ e $\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = k^2 + 2k - 1 = 0$ se e solo se $k = -1 \pm \sqrt{2}$.
Quindi, per il principio dei minori orlati,

$$\dim U_k = r(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = -1 \pm \sqrt{2} \\ 3 & \text{se } k \neq -1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

e una base di U_k sarà $\{(k,0,1,0),(1,1,-1,0)\}$ se $k = -1 \pm \sqrt{2}$ e $\{(1,k,1,0),(k,0,1,0),(1,1,-1,0)\}$ se $k \neq -1 \pm \sqrt{2}$.
Posto $X_3 = s, X_4 = t$ abbiamo che un vettore di W_k è del tipo

$$(-ks + t, ks, s, t) = s(-k, k, 1, 0) + t(1, 0, 0, 1).$$

Pertanto W_k ha dimensione 2 con base $\{(-k,k,1,0),(1,0,0,1)\}$.
(b) Per calcolare $W_k + U_k$, consideriamo la matrice dei loro generatori

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -k & k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La sottomatrice

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -k & k & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3 in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = k^2 + 2k - 1 \text{ e } \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -k & k & 1 \end{vmatrix} = k^2 + 3k$$

non si annullano simultaneamente. Osservando che l'ultima riga di A è indipendente dalle prime quattro, si deduce che, per ogni k,

$$\dim(W_k + U_k) = r(A) = 4$$

e dalla formula di Grassmann si deduce che

$$\dim(U_k \cap W_k) = \dim U_k + \dim W_k - \dim(U_k + W_k) =$$

$$= \begin{cases} 2 & \text{se } k = -1 \pm \sqrt{2} \\ 3 & \text{se } k \neq -1 \pm \sqrt{2} \end{cases} + 2 - 4 = \begin{cases} 0 & \text{se } k = -1 \pm \sqrt{2} \\ 1 & \text{se } k \neq -1 \pm \sqrt{2} \end{cases} .$$

(c) Supponiamo che V esista. Se $k \neq -1 \pm \sqrt{2}$ abbiamo $\dim V = 4 - \dim U_k = 1$ e anche $\dim(U_k \cap W_k) = 1$, quindi non è possibile che $W_k \cap U_k \subset V, W_k \cap U_k \neq V$. Invece se $k = -1 \pm \sqrt{2}$ abbiamo $\dim V = 4 - \dim U_k = 2$ e $\dim(U_k \cap W_k) = 0$. Presi due vettori v_1, v_2 che completano la base di U_k ad una base di $\mathbb{R}^4$ e posto $V = \langle v_1, v_2 \rangle$, otteniamo che $V \oplus U_k = \mathbb{R}^4$ e $\{0\} = W_k \cap U_k \subset V, W_k \cap U_k \neq V$.
Se ne deduce che V esiste se e solo se $k = -1 \pm \sqrt{2}$. ∎

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Siano $v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (-1,1,1,0) \in \mathbb{R}^4$, sia $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$F_{|U} = 2\mathrm{Id}_U, F(E_1 - E_4) = (k-1)E_1 - E_3, F(E_4) = v_1 + v_2 + E_1 + kE_4$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.
(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, scelto un valore di k e individuato un autovalore $\lambda \neq 2$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.
(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Dato che $v_1, v_2 \in U$, abbiamo che $F(v_1) = 2v_1, F(v_2) = 2v_2$, quindi conviene scegliere una base che contenga v_1 e v_2, per esempio $e = \{v_1, v_2, E_1, E_4\}$: infatti si tratta di una base dato che

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Scriviamo la matrice di F nella base e. Abbiamo già $F(E_4) = v_1 + v_2 + E_1 + kE_4$ espresso nella base e. Invece

$$F(E_1) = (k-1)E_1 - E_3 + F(E_4) = (k-1)E_1 - E_3 + v_1 + v_2 + E_1 + kE_4 = kE_1 + E_2 + E_3 + kE_4$$

Del resto

$$av_1 + bv_2 + cE_1 + dE_4 = (a - b + c)E_1 + bE_2 + (a+b)E_3 + dE_4$$

e uguagliando le due espressioni otteniamo

$$\begin{cases} a-b+c=k \\ b=1 \\ a+b=1 \\ d=k \end{cases}$$

che ha soluzione $a=0, b=1, c=k+1, d=k$. Pertanto la matrice di F nella base e è

$$M_e(F)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & k & k \end{pmatrix}$$

ed il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T)=\begin{vmatrix} 2-T & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2-T & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k+1-T & 1 \\ 0 & 0 & k & k-T \end{vmatrix}=(T-2)^2[T^2-(2k+1)T+k^2].$$

Osserviamo che $T^2-(2k+1)T+k^2=0$ ha soluzioni $\frac{2k+1\pm\sqrt{4k+1}}{2}$ se e solo se $k\geq-\frac{1}{4}$. Inoltre, se $k\geq-\frac{1}{4}$,

$$\frac{2k+1\pm\sqrt{4k+1}}{2}=2 \text{ se e solo se } k=2\pm\sqrt{2}.$$

Dunque

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k<-\frac{1}{4}$	$\lambda_1=2$ (m.a. 2)
$k=-\frac{1}{4}$	$\lambda_1=2$ (m.a. 2), $\lambda_2=\frac{1}{4}$ (m.a. 2)
$k=2-\sqrt{2}$	$\lambda_1=2$ (m.a. 3), $\lambda_2=3-2\sqrt{2}$ (m.a. 1)
$k=2+\sqrt{2}$	$\lambda_1=2$ (m.a. 3), $\lambda_2=3+2\sqrt{2}$ (m.a. 1)
$k>-\frac{1}{4}, k\neq 2\pm\sqrt{2}$	$\lambda_1=2$ (m.a. 2), $\lambda_2=\frac{2k+1-\sqrt{4k+1}}{2}$ (m.a. 1), $\lambda_3=\frac{2k+1+\sqrt{4k+1}}{2}$ (m.a. 1),

(b) Le dimensioni degli autospazi di F saranno sempre 1 nei casi in cui la molteplicità algebrica è 1. Se $k=-\frac{1}{4}$ consideriamo $\lambda_2=\frac{1}{4}$ e calcoliamo la base dell'autospazio $V_{\frac{1}{4}}(F)$. Si ha

$$(M_e(F)-\frac{1}{4}I_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{7}{4} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=0$$

se e solo se

$$\begin{cases} \frac{7}{4}x + w = 0 \\ \frac{7}{4}y + z + w = 0 \\ \frac{1}{2}z + w = 0 \\ -\frac{1}{4}z - \frac{1}{2}w = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $x = -\frac{4}{7}w, y = \frac{4}{7}w, z = -2w$, da cui gli autovettori di F associati all'autovalore $\frac{1}{4}$ sono tutti del tipo $w(-\frac{4}{7}v_1 + \frac{4}{7}v_2 - 2E_1 + E_4)$. Ne segue che una base di $V_{\frac{1}{4}}(F)$ è $\{-\frac{4}{7}v_1 + \frac{4}{7}v_2 - 2E_1 + E_4\}$ e $\dim V_{\frac{1}{4}}(F) = 1$.

(c) Dato che $U \subseteq V_2(F)$ e $\dim U = 2$, abbiamo che m.g.$(2) \geq 2$. Da (a) e (b) deduciamo che la somma delle molteplicità geometriche è 4 se $k > -\frac{1}{4}, k \neq 2 \pm \sqrt{2}$, mentre è minore di 4 se $k \leq -\frac{1}{4}$. Invece se $k = 2 \pm \sqrt{2}$ abbiamo che

$$\text{m.g.}(2) = 4 - r(A - 2I_4) = 4 - r(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & k & k-2 \end{pmatrix}) = 2$$

quindi F non è diagonalizzabile in questo caso.

Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $k > -\frac{1}{4}, k \neq 2 \pm \sqrt{2}$. ■

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine $\mathbf{A}$ di dimensione 4 sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Sia S il sottospazio con le seguenti equazioni

$$S : \begin{cases} X - Y - Z + W = 0 \\ X + Y + W = 0 \end{cases}$$

e sia T_k il sottospazio passante per il punto $Q = Q(k+1, 0, 1, 0)$ e di giacitura $W_k = \langle e_1 - ke_2, ke_1 + ke_2 + e_3 \rangle$.

(a) Calcolare la dimensione di S e di T_k e le equazioni cartesiane di T_k.

(b) Determinare per quali k si ha che S e T_k sono paralleli, incidenti o sghembi.

(c) Determinare per quali k esiste un sottospazio M di $\mathbf{A}$ tale che $\dim M = 3, S \cup T_k \subseteq M$.

SOLUZIONE:

(a) Dato che, chiaramente $e_1 - ke_2$ e $ke_1 + ke_2 + e_3$ non sono paralleli, si ha che

$$\dim T_k = \dim W_k = 2.$$

Sia $P = P(X, Y, Z, W) \in \mathbf{A}$. Allora $\overrightarrow{QP} = (X - k - 1)e_1 + Ye_2 + (Z-1)e_3 + We_4$. Quindi si ha che

$$P \in T_k \iff \overrightarrow{QP} \in W_k = \langle e_1 - ke_2, ke_1 + ke_2 + e_3 \rangle$$

se e solo se

$$(*)\ r\left(\begin{pmatrix} X-k-1 & Y & Z-1 & W \\ 1 & -k & 0 & 0 \\ k & k & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2.$$

Dato che $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 1$, per il principio dei minori orlati si ha che $(*)$ è equivalente a

$$\begin{vmatrix} X-k-1 & Y & Z-1 \\ 1 & -k & 0 \\ k & k & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ e } \begin{vmatrix} X-k-1 & Z-1 & W \\ 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ovvero se e solo se

$$\begin{cases} kX + Y - (k+k^2)Z = 0 \\ W = 0 \end{cases}$$

e queste sono le equazioni cartesiane di T_k.
Inoltre abbiamo

$$\dim S = 4 - r\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2.$$

(b) $S \cap T_k$ è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} X - Y - Z + W = 0 \\ X + Y + W = 0 \\ kX + Y - (k+k^2)Z = 0 \\ W = 0 \end{cases}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & -k-k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2k^2 - k - 1 \neq 0$$

per ogni k. Quindi il sistema ha un'unica soluzione $(0,0,0,0)$. Ne segue che

$$S \cap T_k = \{O\}.$$

Dunque S e T_k non sono sghembi e non possono neanche essere paralleli, altrimenti, essendo due piani incidenti, coinciderebbero, contraddicendo il fatto che si intersecano in un punto. Se ne conclude che S e T_k sono incidenti, per ogni $k \in \mathbb{R}$.
(c) Se esistesse un sottospazio M di $\mathbf{A}$ tale che $\dim M = 3, S \cup T_k \subseteq M$, allora S e T_k sarebbero due piani in uno spazio affine di dimensione 3 che si intersecano in un punto. Come è noto, questo non può accadere. Quindi un tale M non esiste per nessun $k \in \mathbb{R}$ ■.