UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2022-2023

Prova scritta del 18-7-2023

TESTO

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} 2X_1 - 2X_2 + kX_3 = 2 \\ -2X_1 + kX_2 + 2X_3 = 0 \\ -4X_2 + 2X_3 = 1 \\ -2X_1 + (2k-6)X_2 + (k+6)X_3 = 3 \end{cases}.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile.

(b) Per i valori di k per i quali il sistema è compatibile, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U_k il sottospazio vettoriale

$$U_k = \langle (1,k,1,0), (k,0,1,0), (1,1,-1,0) \rangle$$

e W_k il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_4 = 0 \\ X_2 - kX_3 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino le dimensioni di U_k, W_k e si scriva esplicitamente una base di tali sottospazi.

(b) Si determinino le dimensioni di $W_k + U_k$ e di $W_k \cap U_k$.

(c) Si determinino tutti i valori di k (se esistono) per i quali c'è un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$V \oplus U_k = \mathbb{R}^4 \text{ e } W_k \cap U_k \subset V, W_k \cap U_k \neq V.$$

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Siano $v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (-1,1,1,0) \in \mathbb{R}^4$, sia $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$F_{|U} = 2\mathrm{Id}_U, F(E_1 - E_4) = (k-1)E_1 - E_3, F(E_4) = v_1 + v_2 + E_1 + kE_4$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.
(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, scelto un valore di k e individuato un autovalore $\lambda \neq 2$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.
(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.
4. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine $\mathbf{A}$ di dimensione 4 sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Sia S il sottospazio con le seguenti equazioni

$$S : \begin{cases} X - Y - Z + W = 0 \\ X + Y + W = 0 \end{cases}$$

e sia T_k il sottospazio passante per il punto $Q = Q(k+1, 0, 1, 0)$ e di giacitura
$W_k = \langle e_1 - ke_2, ke_1 + ke_2 + e_3 \rangle$.
(a) Calcolare la dimensione di S e di T_k e le equazioni cartesiane di T_k.
(b) Determinare per quali k si ha che S e T_k sono paralleli, incidenti o sghembi.
(c) Determinare per quali k esiste un sottospazio M di $\mathbf{A}$ tale che $\dim M = 3, S \cup T_k \subseteq M$.