UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2022-2023

Prova scritta del 23-1-2024

TESTO E SOLUZIONI

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + kX_2 + X_3 = -1 \\ X_1 + X_2 + kX_4 = 2 \\ -X_1 - X_2 + 2X_4 = -2 \\ X_2 + kX_3 + X_4 = 1. \end{cases}$$

(a) Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile.

(b) Per i valori di k per i quali il sistema è compatibile, calcolare esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & k & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & k & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_3 si trova

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & k & 2 \\ 1 & k & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & k & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui con le operazioni $R_2 \to R_2 + R_1, R_3 \to R_3 + R_1$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & k & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_4 con R_2 si trova

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 & 0 \end{pmatrix}$$

e con l' operazione $R_3 \to R_3 - (k-1)R_2$ si trova la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2+k+1 & 3-k & -2-k \\ 0 & 0 & 0 & k+2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $-k^2+k+1 = 0$ se e solo se $k = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, mentre $k+2=0$ se e e solo se $k=-2$.
Se $k \neq \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}, -2$, la matrice A è a gradini, quindi il sistema originario è compatibile e si trova risolvendo

$$X_1 = \frac{2k^2+k-1}{k^2-k-1},\ X_2 = -\frac{3k+1}{k^2-k-1},\ X_3 = \frac{k+2}{k^2-k-1},\ X_4 = 0.$$

Se $k=-2$, la matrice A è ancora a gradini, quindi il sistema originario è compatibile e si trova, risolvendo

$$X_1 = t+1,\ X_2 = t+1,\ X_3 = t,\ X_4 = t, t \in \mathbb{R}.$$

Se $k = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, posto $k_0 = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, la matrice A diventa

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & k_0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-k_0 & -2-k_0 \\ 0 & 0 & 0 & k_0+2 & 0 \end{pmatrix}$$

e con l' operazione $R_4 \to R_4 - \frac{k_0+2}{3-k_0}R_3$ si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & k_0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-k_0 & -2-k_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(k_0+2)^2}{3-k_0} \end{pmatrix}.$$

Dato che $\frac{(k_0+2)^2}{3-k_0} \neq 0$ si ha che il sistema non è compatibile.
Se ne deduce che il sistema originario è compatibile e solo se $k \neq \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. ■

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ e consideriamo i sottospazi vettoriali delle soluzioni del sistemi lineari omogenei

$$U : \begin{cases} X_1 - X_3 = 0 \\ X_2 + X_4 = 0 \end{cases},\quad W_k : \begin{cases} kX_1 - X_2 = 0 \\ kX_2 + kX_3 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino le dimensioni di U, W_k e si scriva esplicitamente una base di tali sottospazi.
(b) Si determinino le dimensioni di $W_k + U$ e di $W_k \cap U$.
(c) Si determinino tutti i valori di k (se esistono) per i quali ci sono due sottospazi V, V' di $\mathbb{R}^4$ tali che

$$\dim V = \dim V' = 2, V \oplus U = V \oplus W_k = V \oplus V'.$$

SOLUZIONE:

(a) Risolvendo il sistema di U abbiamo $X_1 = s, X_2 = t, X_3 = s, X_4 = -t$. Pertanto un vettore di U è del tipo $(s, t, s, -t) = s(1, 0, 1, 0) + t(0, 1, 0, -1)$ e una base di U è $\{E_1 + E_3, E_2 - E_4\}$, da cui $\dim U = 2$.
Analogamente, risolvendo il sistema di W_k abbiamo due casi. Se $k = 0$ allora le soluzioni sono $X_1 = s, X_2 = 0, X_3 = t, X_4 = u$. Pertanto un vettore di W_0 è del tipo $(s, 0, t, u) = s(1, 0, 0, 0) + t(0, 0, 1, 0) + u(0, 0, 0, 1)$ e una base di W_0 è $\{E_1, E_3, E_4\}$, da cui $\dim W_0 = 3$. Invece, se $k \neq 0$, le soluzioni sono $X_1 = s, X_2 = ks, X_3 = -ks, X_4 = t$. Pertanto un vettore di W_k è del tipo $(s, ks, -ks, t) = s(1, k, -k, 0) + t(0, 0, 0, 1)$ e una base di W_k è $\{E_1 + kE_2 - kE_3, E_4\}$, da cui $\dim W_k = 2$ se $k \neq 0$.
(b) Calcoliamo prima $\dim(U + W_k)$, utilizzando le basi ottenute in (a).
Se $k = 0$ abbiamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, come sappiamo, $\dim(U + W_0) = r(A) = 4$. Quindi la formula di Grassmann ci da

$$\dim(U \cap W_0) = \dim U + \dim W_0 - \dim(U + W_0) = 1.$$

Se $k \neq 0$, abbiamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & k & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\det(B) = -k - 1$, mentre il minore

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Quindi, per $k \neq 0$, $\dim(U + W_k) = r(B) = \begin{cases} 3 & \text{se } k = -1 \\ 4 & \text{se } k \neq -1 \end{cases}$ e la formula di Grassmann ci da

$$\dim(U \cap W_k) = \dim U + \dim W_k - \dim(U + W_k) = 4 - \begin{cases} 3 & \text{se } k = -1 \\ 4 & \text{se } k \neq -1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = -1 \\ 0 & \text{se } k \neq -1 \end{cases}.$$

(c) Se V e V' esistono, allora $\dim(V) + \dim(U) = \dim(V) + \dim(W_k)$, da cui $\dim(W_k) = \dim(U) = 2$, quindi $k \neq 0$. Inoltre $\dim(V) + \dim(V') = 4$, quindi

$$V \oplus U = V \oplus W_k = V \oplus V' = \mathbb{R}^4.$$

Supponiamo $k \neq 0$ e scegliamo $V = \langle E_2, E_3 \rangle$. Allora la matrice di V ed U è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 4, mentre la matrice di V ed W_k è

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 4. Quindi $V \oplus U = \mathbb{R}^4 = V \oplus W_k$. Scelto ora $V' = \langle E_1, E_4 \rangle$ abbiamo anche che $V \oplus V' = \mathbb{R}^4$. Se ne conclude che V e V' esistono se e solo se $k \neq 0$. ■

3. Siano $k \in \mathbb{R}, v_1 = (0, 1, 0, 1), v_2 = (1, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$v_1 + v_2 \in N(F), v_1 - v_2 \in N(F), F(E_3) = kE_2 + E_4, F(E_4) = -kE_2$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, scelto un valore di k e individuato un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Abbiamo $v_1 + v_2 \in N(F), v_1 - v_2 \in N(F)$, quindi $2v_1 = v_1 + v_2 + v_1 - v_2 \in N(F)$, da cui deduciamo che $v_1, v_2 \in N(F)$. Essendo $v_1 = E_2 + E_4, v_2 = E_1 + E_3$, si ha che

$$F(E_2) = -F(E_4) = kE_2, F(E_1) = -F(E_3) = -kE_2 - E_4.$$

Pertanto, nella base canonica $E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, abbiamo

$$M_E(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & k & k & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} -T & 0 & 0 & 0 \\ -k & k-T & k & -k \\ 0 & 0 & -T & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -T \end{vmatrix} = T^3(T-k).$$

Dunque gli autovalori di F sono 0 e k e si ha

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k = 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 4)
$k \neq 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 3), $\lambda_2 = k$ (m.a. 1)

(b) Dalla tabella si deduce che occorre prendere $\lambda = 0$. Lo faremo per ogni k.
Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore 0 sono soluzioni del sistema $(M_E(F) - 0I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z, w)$. Si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & k & k & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} -kx + ky + kz - kw = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}.$$

Se $k = 0$ abbiamo $z = x$ e gli autovettori di F associati all'autovalore 0 sono tutti del tipo $(x, y, x, w) = x(1, 0, 1, 0) + y(0, 1, 0, 0) + w(0, 0, 0, 1)$ e una base di $V_0(F)$ è $\{E_1 + E_3, E_2, E_4\}$. In particolare la molteplicità geometrica di 0 è 3, per $k = 0$.
Se $k \neq 0$ abbiamo $z = x, -x + y + z - w = 0$, ovvero $z = x, w = y$ e gli autovettori di F associati all'autovalore 0 sono tutti del tipo $(x, y, x, y) = x(1, 0, 1, 0) + y(0, 1, 0, 1)$ e una

base di $V_k(F)$ è $\{E_1 + E_3, E_2 + E_4\}$. In particolare la molteplicità geometrica di 0 è 2, per $k \neq 0$.

(c) Dalla (c) deduciamo che m.g(0) < m.a.(0) per ogni k, quindi F non è mai diagonalizzabile. ■

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i due sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} X + Y = 1 \\ X - Y - Z + W = 0 \end{cases}, T_k : \begin{cases} X + Y + W = -1 \\ Z - W = k \\ X + kY + Z + W = 0 \end{cases}.$$

(a) Calcolare la dimensione di S e di T_k.

(b) Determinare se esiste un k tale che S e T_k non sono paralleli.

(c) Determinare se esiste un k tale che c'è un iperpiano di A che contiene S e T_k.

SOLUZIONE:

(a) La giacitura di S si ottiene dalle soluzioni del sistema omogeneo associato

$$\begin{cases} X + Y = 0 \\ X - Y - Z + W = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $X = u, Y = -u, Z = v, W = -2u + v$, dove $u, v \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\text{giac}(S) = \langle e_1 - e_2 - 2e_4, e_3 + e_4 \rangle \text{ e } \dim(S) = 2.$$

La giacitura di T_k si ottiene dalle soluzioni del sistema omogeneo associato

$$\begin{cases} X + Y + W = 0 \\ Z - W = 0 \\ X + kY + Z + W = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $X = (k-2)t, Y = t, Z = (1-k)t, W = (1-k)t$, dove $t \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\text{giac}(T_k) = \langle (k-2)e_1 + e_2 + (1-k)e_3 + (1-k)e_4 \rangle \text{ e } \dim(T_k) = 1.$$

(b) Abbiamo dalla (a) che S e T_k non sono paralleli se e solo se

$$(k-2)e_1 + e_2 + (1-k)e_3 + (1-k)e_4 \notin \langle e_1 - e_2 - 2e_4, e_3 + e_4 \rangle$$

ovvero se e solo se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ k-2 & 1 & 1-k & 1-k \end{pmatrix}$$

ha rango 3. Dato che

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ k-2 & 1 & 1-k \end{vmatrix} = -2$$

si ha che $r(A) = 3$, quindi S e T_k non sono mai paralleli.

(c) Dato che S è un piano e T_k è una retta e non sono paralleli, se esistesse un iperpiano di A che contiene S e T_k, allora S e T_k sarebbero contenuti in uno spazio affine di dimensione 3, quindi dovrebbero intersecarsi in un punto. Ora

$$S \cap T_k : \begin{cases} X + Y = 1 \\ X - Y - Z + W = 0 \\ X + Y + W = -1 \\ Z - W = k \\ X + kY + Z + W = 0 \end{cases} .$$

e la matrice completa del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & k \\ 1 & k & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha determinante $k^2 - 4k + 7 \neq 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. Quindi $S \cap T_k = \emptyset$.

Pertanto non c'è un iperpiano di A che contiene S e T_k. ■.