UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2022-2023

Prova scritta del 23-1-2024

TESTO

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + kX_2 + X_3 = -1 \\ X_1 + X_2 + kX_4 = 2 \\ -X_1 - X_2 + 2X_4 = -2 \\ X_2 + kX_3 + X_4 = 1. \end{cases}$$

(a) Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile.

(b) Per i valori di k per i quali il sistema è compatibile, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ e consideriamo i sottospazi vettoriali delle soluzioni del sistemi lineari omogenei

$$U : \begin{cases} X_1 - X_3 = 0 \\ X_2 + X_4 = 0 \end{cases}, \quad W_k : \begin{cases} kX_1 - X_2 = 0 \\ kX_2 + kX_3 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino le dimensioni di U, W_k e si scriva esplicitamente una base di tali sottospazi.

(b) Si determinino le dimensioni di $W_k + U$ e di $W_k \cap U$.

(c) Si determinino tutti i valori di k (se esistono) per i quali ci sono due sottospazi V, V' di $\mathbb{R}^4$ tali che

$$\dim V = \dim V' = 2, V \oplus U = V \oplus W_k = V \oplus V'.$$

3. Siano $k \in \mathbb{R}, v_1 = (0,1,0,1), v_2 = (1,0,1,0) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$v_1 + v_2 \in N(F), v_1 - v_2 \in N(F), F(E_3) = kE_2 + E_4, F(E_4) = -kE_2$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, scelto un valore di k e individuato un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i due sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} X + Y = 1 \\ X - Y - Z + W = 0 \end{cases}, T_k : \begin{cases} X + Y + W = -1 \\ Z - W = k \\ X + kY + Z + W = 0 \end{cases}.$$

(a) Calcolare la dimensione di S e di T_k.

(b) Determinare se esiste un k tale che S e T_k non sono paralleli.

(c) Determinare se esiste un k tale che c'è un iperpiano di A che contiene S e T_k.