UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2022-2023

Prima prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Determinare per quali valori $k \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + kX_2 - X_3 + X_4 = k \\ X_1 + 2X_2 - X_4 = 1 \\ 4X_1 + (k+4)X_2 - (2k+1)X_3 = k+1 \\ X_1 + X_2 - kX_3 = 0 \end{cases}.$$

e, quando è compatibile, calcolare esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 1 & k \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & k+4 & -2k-1 & 0 & k+1 \\ 1 & 1 & -k & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_2 si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & k & -1 & 1 & k \\ 4 & k+4 & -2k-1 & 0 & k+1 \\ 1 & 1 & -k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui con le operazioni $R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - 4R_1, R_4 \to R_4 - R_1$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k-2 & -1 & 2 & k-1 \\ 0 & k-4 & -2k-1 & 4 & k-3 \\ 0 & -1 & -k & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_4 con R_2 si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -k & 1 & -1 \\ 0 & k-4 & -2k-1 & 4 & k-3 \\ 0 & k-2 & -1 & 2 & k-1 \end{pmatrix}$$

e con l' operazione $R_3 \to R_3 - R_4$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -k & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2k & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & -1 & 2 & k-1 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_3 \to \frac{1}{2}R_3$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -k & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -k & 1 & -1 \\ 0 & k-2 & -1 & 2 & k-1 \end{pmatrix}$$

e con le operazioni $R_3 \to R_3 - R_2, R_4 \to R_4 + (k-2)R_2$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -k & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k^2+2k-1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_3 con R_4 si trova la matrice

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -k & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -(k-1)^2 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq 1$, la matrice B_k è a gradini, quindi il sistema originario è compatibile per $k \neq 1$.

Posto $X_4 = t$ si trova risolvendo

$$X_4 = t,\ X_3 = \frac{kt-1}{(k-1)^2},\ X_2 = t + 1 - \frac{k(kt-1)}{(k-1)^2},\ X_1 = -t - 1 + \frac{2k(kt-1)}{(k-1)^2}, t \in \mathbb{R}.$$

Se $k = 1$ si ha

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, posto $X_3 = t$, si trova risolvendo

$$X_4 = 1,\ X_3 = t,\ X_2 = 2 - t,\ X_1 = 2t - 2, t \in \mathbb{R}.$$

Il sistema originario è pertanto compatibile anche per $k = 1$.

Se ne deduce che il sistema originario è compatibile per ogni $k \in \mathbb{R}$. ■

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Usando solo operazioni elementari, determinare i valori di k per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, calcolare A^{-1}.

(b) Sia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare tutti i valori di k (se esistono) per i quali NON esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

SOLUZIONE:

(a) Applichiamo operazioni elementari a

$$(A\ I_3) = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_2 con R_1 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_2 \to R_2 - kR_1$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_2 con R_3, si trova la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & 1 & -k & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne deduciamo che

$$(*)\quad r(A) = \begin{cases} 3 & \text{if } k \neq \pm 1 \\ 2 & \text{if } k = \pm 1 \end{cases}$$

e quindi che A è invertibile se e solo se $k \neq \pm 1$.

Supponiamo ora $k \neq \pm 1$ e calcoliamo A^{-1}.

Ripartendo da C, con l'operazione $R_3 \to \frac{1}{1-k^2} R_3$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1-k^2} & -\frac{k}{1-k^2} & 0 \end{pmatrix}$$

e con le operazioni $R_1 \to R_1 - kR_3, R_2 \to R_2 - 2R_3$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{k}{1-k^2} & \frac{1}{1-k^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{1-k^2} & \frac{2k}{1-k^2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1-k^2} & -\frac{k}{1-k^2} & 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$A^{-1} = \frac{1}{1-k^2} \begin{pmatrix} -k & 1 & 0 \\ -2 & 2k & 1-k^2 \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Dato che il rango è preservato da operazioni elementari, calcoliamo prima il rango di

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_1$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_2$, si trova la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $r(B) = r(D) = 2$.

Se $k \neq \pm 1$, sappiamo da $(*)$ che $r(A) = 3$, quindi, se $k \neq \pm 1$, non esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

Supponiamo ora $k = \pm 1$. Se esistesse una sequenza di operazioni elementari che trasformasse A in B, allora i sistemi omogenei $AX = 0$ e $BX = 0$, dove $X = {}^t(X_1 \quad X_2 \quad X_3)$, sarebbero equivalenti.

Ma il sistema $BX = 0$ è equivalente a $DX = 0$ che ha per esempio la soluzione $(1, 0, -1)$. Del resto, il sistema $AX = 0$ è equivalente al sistema che possiamo ottenere dalla matrice C, prendendo solo le prime tre colonne:

$$\begin{cases} X_1 \pm X_3 = 0 \\ X_2 + 2X_3 = 0 \end{cases}.$$

Dato che tale sistema non ha $(1,0,-1)$ come soluzione, deduciamo che, se $k = \pm 1$, non esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.
Si conclude che, qualsiasi sia k, non esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B. $\blacksquare$

3. Sia k un numero reale e sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Siano

$$v_1 = e_1 + e_3, v_2 = e_2 - e_4, v_3 = e_1 + ke_4, v_4 = e_1 - ke_2 + e_3.$$

Siano $U =< v_1, v_2 >, W =< v_1, v_3, v_4 >$ i sottospazi generati.
(a) Calcolare la dimensione di U e di W;
(b) Determinare (se esistono) tutti i valori di k tali che $U \subset W, U \neq W$;
(c) Determinare (se esistono) tutti i valori di k tali che $\dim U \cap W = 1, U + W \neq V$.

SOLUZIONE:

Utilizzeremo le coordinate dei vettori nella base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.
(a) Per calcolare la dimensione di U consideriamo la matrice dei suoi generatori

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice è a gradini, quindi

$$\dim U = 2.$$

Analogamente, per calcolare la dimensione di W, consideriamo la matrice dei suoi generatori

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k \\ 1 & -k & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e facciamo operazioni elementari. Con le operazioni $R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - R_1$, si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & k \\ 0 & -k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_2 con R_3 troviamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & k \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq 0$ allora A è a gradini e $r(A) = 3$. Invece, se $k = 0$, allora, dato che ai fini del calcolo del rango possiamo eliminare righe e colonne nulle, si ha

$$r(A) = r(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}) = r(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}) = 2.$$

Ne deduciamo che

$$\dim W = r(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 3 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}.$$

(b) e (c) Calcoliamo prima $\dim(U + W)$, utilizzando i generatori v_1, v_2 di U e i vettori corrispondenti alle righe di A per W. Abbiamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & k \end{pmatrix}$$

e, come sappiamo, $\dim(U + W) = r(B)$.

Essendo la prima e terza riga uguali, abbiamo anche che $r(B) = r(B')$, dove

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & k \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_3 \to R_3 + kR_2$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & -1 & k \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_3 con R_4, troviamo la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & k \\ 0 & 0 & 0 & -k \end{pmatrix}.$$

Dato che C è a gradini, deduciamo che

$$(*) \;\; \dim(U + W) = r(C) = \begin{cases} 3 & \text{se } k = 0 \\ 4 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}.$$

Quindi la formula di Grassmann ci da

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) =$$

$$= 2 + \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 3 & \text{se } k \neq 0 \end{cases} - \begin{cases} 3 & \text{se } k = 0 \\ 4 & \text{se } k \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 1 & \text{se } k \neq 0 \end{cases} = 1.$$

Dunque

$$(**) \;\; \dim(U \cap W) = 1 \text{ per ogni } k.$$

Se fosse $U \subset W$, avremmo che $U \cap W = U$, quindi $\dim(U \cap W) = \dim U = 2$, contraddicendo $(**)$. Ne segue che non esistono valori di k tali che $U \subset W, U \neq W$.

Invece, sempre da $(**)$, la condizione $\dim U \cap W = 1, U + W \neq V$ è equivalente a $U + W \neq V$, ovvero a $\dim(U + W) < 4$ e deduciamo da $(*)$ che ciò accade se e solo se $k = 0$. ■