

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2022-2023

Prima prova di esonero

TESTO

1. Determinare per quali valori  $k \in \mathbb{R}$ , è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + kX_2 - X_3 + X_4 = k \\ X_1 + 2X_2 - X_4 = 1 \\ 4X_1 + (k+4)X_2 - (2k+1)X_3 = k+1 \\ X_1 + X_2 - kX_3 = 0 \end{cases}$$

e, quando è compatibile, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Sia  $k \in \mathbb{R}$  e sia

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Usando solo operazioni elementari, determinare i valori di  $k$  per i quali  $A$  è (o no) invertibile e, in tal caso, calcolare  $A^{-1}$ .

(b) Sia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare tutti i valori di  $k$  (se esistono) per i quali NON esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma  $A$  in  $B$ .

3. Sia  $k$  un numero reale e sia  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ . Siano

$$v_1 = e_1 + e_3, v_2 = e_2 - e_4, v_3 = e_1 + ke_4, v_4 = e_1 - ke_2 + e_3.$$

Siano  $U = \langle v_1, v_2 \rangle, W = \langle v_1, v_3, v_4 \rangle$  i sottospazi generati.

(a) Calcolare la dimensione di  $U$  e di  $W$ ;

(b) Determinare (se esistono) tutti i valori di  $k$  tali che  $U \subset W, U \neq W$ ;

(c) Determinare (se esistono) tutti i valori di  $k$  tali che  $\dim U \cap W = 1, U + W \neq V$ .