UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2022-2023

Seconda prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Sia $0 \neq k \in \mathbb{R}$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Sia F un endomorfismo di V tale che:

1) k è un autovalore di F e $V_k(F) = \langle e_1, e_1 + ke_2 \rangle$,

2) $F(e_3 - e_4) = -(k+1)e_4, F(e_4) = e_3 + ke_4$.

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Determinare tutti i k tali che esistono autovalori $\lambda \neq k$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$. Per ogni tale k, trovare una base per l'autospazio di F associato a tutti gli autovalori $\lambda \neq k$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che, essendo $k \neq 0$ ed essendo $V_k(F)$ un sottospazio, si ha che

$$e_2 = \frac{1}{k}(e_1 + ke_2) - \frac{1}{k}e_1 \in V_k(F)$$

ovvero che

$$F(e_2) = ke_2.$$

Dalle 2) inoltre si calcola facilmente che

$$F(e_3) = -(k+1)e_4 + F(e_4) = e_3 - e_4.$$

Ne segue che

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & k \end{pmatrix}.$$

Pertanto il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} k-T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k-T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-T & 1 \\ 0 & 0 & -1 & k-T \end{vmatrix} = (T-k)^2[T^2-(k+1)T+k+1].$$

Quindi gli autovalori di F sono k (come sapevamo) e, se $k \leq -1$ o se $k \geq 3$, anche $\frac{1}{2}[k+1 \pm \sqrt{(k+1)(k-3)}]$. Vediamo se ci possono essere coincidenze: si verifica subito che questi ultimi due autovalori non possono essere uguali a k, in quanto, posto $T = k$ in $T^2-(k+1)T+k+1$ si ottiene $1 \neq 0$. Pertanto si ha

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$-1 < k < 3$	$\lambda_1 = k$ (m.a. 2)
$k = -1$	$\lambda_1 = -1$ (m.a. 2), $\lambda_2 = 0$ (m.a. 2)
$k = 3$	$\lambda_1 = 3$ (m.a. 2), $\lambda_2 = 2$ (m.a. 2)
$k < -1$ o $k > 3$	$\lambda_1 = k$ (m.a. 2), $\lambda_2 = \frac{1}{2}[k+1-\sqrt{(k+1)(k-3)}]$ (m.a. 1),
	$\lambda_3 = \frac{1}{2}[k+1+\sqrt{(k+1)(k-3)}]$ (m.a. 1)

(b) Dalla tabella si deduce che occorre prendere $k = -1, \lambda = 0$ e $k = 3, \lambda = 2$.

Nel caso $k = -1, \lambda = 0$, calcoliamo la base di $V_0(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore 0 sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - 0I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z, w)$. Si ottiene

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x = 0 \\ -y = 0 \\ z + w = 0 \\ -z - w = 0 \end{cases}$$

che ha le soluzioni $(0, 0, -w, w)$. Quindi gli autovettori di F associati all'autovalore 1 sono tutti del tipo $-we_3 + we_4$ e una base di $V_0(F)$ è $\{e_3 - e_4\}$. In particolare la molteplicità geometrica di 0 è 1, per $k = -1$.

Nel caso $k = 3, \lambda = 2$, calcoliamo la base di $V_2(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore 2 sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - 2I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z, w)$. Si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -z + w = 0 \\ -z + w = 0 \end{cases}$$

che ha le soluzioni $(0, 0, w, w)$. Quindi gli autovettori di F associati all'autovalore 2 sono tutti del tipo $we_3 + we_4$ e una base di $V_2(F)$ è $\{e_3 + e_4\}$. In particolare la molteplicità geometrica di 2 è 1, per $k = 3$.

(c) Dalla tabella precedente e dalla (b) deduciamo che l'unico caso in cui la somma delle molteplicità geometriche è 4 è se $k < -1$ o $k > 3$. Quindi F è diagonalizzabile se e solo se $k < -1$ o $k > 3$. $\blacksquare$

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate.

Sia S il sottospazio di giacitura $W = \langle e_1 - e_3, e_2 - e_3 \rangle$ e passante per il punto $Q = Q(1, 0, 0, 1)$ (coordinate nel riferimento affine dato). Si consideri il sistema

$$(*) : \begin{cases} X + Y + Z + W = 1 \\ X - Y + Z = 2 \\ X - 3Y + kZ - W = k + 2 \end{cases}$$

e sia

$$T_k = \{P = P(x, y, z, w) \in A : (x, y, z, w) \text{ è soluzione di } (*)\}.$$

(a) Determinare per quali k si ha che T_k è un sottospazio di A e, in tal caso, calcolarne la dimensione.

(b) Determinare i valori di k (se esistono) per i quali T_k è parallelo ad S.

(c) Determinare i valori di k (se esistono) per i quali esiste una retta r di A tale che r è parallela a T_k e $r \subset S$.

SOLUZIONE:

(a) Sappiamo che T_k è un sottospazio di A se e solo se $(*)$ è compatibile. Applichiamo quindi il teorema di Kronecker-Rouché-Capelli. Siano

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & k & -1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k+2 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & k \end{vmatrix} = 2 - 2k$$

da cui deduciamo che
$$r(A') = \begin{cases} 2 \text{ se } k = 1 \\ 3 \text{ se } k \neq 1 \end{cases}.$$
In particolare anche $r(A'B) = 3$ se $k \neq 1$. Invece se $k = 1$ si ha
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$
da cui deduciamo che $r(A'B) = 2$ se $k = 1$. Pertanto $r(A') = r(A'B) = 2$ per ogni $k \in \mathbb{R}$ e quindi $(*)$ è compatibile per ogni $k \in \mathbb{R}$. Dunque T_k è un sottospazio di A per ogni $k \in \mathbb{R}$. Inoltre
$$\dim T_k = \begin{cases} 2 \text{ se } k = 1 \\ 1 \text{ se } k \neq 1 \end{cases}.$$
(b) e (c) Calcoliamo la giacitura di T_k, ovvero i vettori le cui coordinate sono soluzioni del sistema omogeneo
$$(*)_0 : \begin{cases} X + Y + Z + W = 0 \\ X - Y + Z = 0 \\ X - 3Y + kZ - W = 0 \end{cases}.$$
Risolvendo il sistema si trovano le soluzioni:

1) se $k \neq 1$
$$(-\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}, 0, t) = -\frac{t}{2}(1, 1, 0, -2), t \in \mathbb{R}, \text{ se } k \neq 1$$
e la giacitura di T_k è $\langle e_1 + e_2 - 2e_4 \rangle$;

2) se $k = 1$
$$(-s - \frac{t}{2}, -\frac{t}{2}, s, t) = s(-1, 0, 1, 0) - \frac{t}{2}(1, 1, 0, -2), s, t \in \mathbb{R}, \text{ se } k = 1.$$
e la giacitura di T_1 è $\langle -e_1 + e_3, e_1 + e_2 - 2e_4 \rangle$.

Se $k \neq 1$, essendo $\dim S = 2, \dim T_1 = 1$, se fossero paralleli, avremmo che $\text{giac}(T_k) \subset \text{giac}(S)$, ovvero $e_1 + e_2 - 2e_4 \in \langle e_1 - e_3, e_2 - e_3 \rangle$. Ma la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
ha rango 3, quindi $e_1 + e_2 - 2e_4 \notin \langle e_1 - e_3, e_2 - e_3 \rangle$. Quindi S e T_k non sono paralleli in questo caso.

Se $k = 1$, essendo $\dim S = 2 = \dim T_k = 2$, se fossero paralleli, avremmo che $\mathrm{giac}(T_k) = \mathrm{giac}(S)$. Ma $e_2 - e_3 \in \mathrm{giac}(S)$ ha coordinate $(0, 1, -1, 0)$ che non sono soluzioni di $(*)_0$. Quindi S e T_1 non sono paralleli.

Ne deduciamo che non esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che T_k è parallelo ad S.

Per la (c), osserviamo che se $r \subset S$, allora r è parallela ad S, quindi, essendo $\dim S = 2$, si ha che $\mathrm{giac}(r) \subset \mathrm{giac}(S)$.

Se $k \neq 1$, essendo $\dim T_1 = 1$, se esistesse una retta r di A tale che r è parallela a T_k e $r \subset S$, allora $\mathrm{giac}(T_k) = \mathrm{giac}(r) \subset \mathrm{giac}(S)$, quindi T_k sarebbe parallelo ad S, contraddicendo (b). Dunque, se $k \neq 1$, non esiste una retta r di A tale che r è parallela a T_k e $r \subset S$.

Se $k = 1$, osserviamo che $e_1 - e_3 \in \mathrm{giac}(T_1) \cap \mathrm{giac}(S)$. Quindi, preso un qualsiasi punto di S, la retta passante per quel punto di giacitura $\langle e_1 - e_3 \rangle$ è contenuta in S ed è parallela a T_1. Pertanto r esiste in questo caso.

Si conclude che esiste una retta r di A tale che r è parallela a T_k e $r \subset S$ se e solo se $k = 1$.

■

3. Siano n ed r due interi tali che $n \geq 1$ e $0 \leq r \leq n$. Siano V uno spazio vettoriale reale con $\dim V = n$ e sia $F : V \to V$ un'applicazione lineare con $r(F) = r$.

(a) Determinare, rispetto alla matrice di F in un'opportuna base di V, le condizioni necessarie e sufficienti affinchè sia $V = N(F) \oplus \mathrm{Im}(F)$.

(b) Determinare, rispetto a n, r e ad un'opportuna base di V, le condizioni necessarie e sufficienti affinchè sia $N(F) = \mathrm{Im}(F)$.

SOLUZIONE:

(a) Supponiamo che $V = N(F) \oplus \mathrm{Im}(F)$. Siano $\{e_1, \ldots, e_{n-r}\}$ una base di $N(F)$ e $\{f_1, \ldots, f_r\}$ una base di $\mathrm{Im}(F)$. Allora $e = \{e_1, \ldots, e_{n-r}, f_1, \ldots f_r\}$ è una base di V e abbiamo

$$F(e_i) = 0, \text{ per } 1 \leq i \leq n - r, F(f_j) \in \mathrm{Im}(F) = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle \text{ per } 1 \leq j \leq r.$$

Pertanto esiste una base e di V tale che

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

dove B è $r \times r$.

Viceversa, supponiamo che esista una base $e = \{e_1, \ldots, e_{n-r}, f_1, \ldots f_r\}$ di V tale che

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

dove B è $r \times r$. Allora abbiamo

$$F(e_i) = 0, \text{ per } 1 \leq i \leq n-r, F(f_j) \in \langle f_1, \ldots, f_r \rangle \text{ per } 1 \leq j \leq r.$$

Ne segue che $\mathrm{Im}(F) \subseteq \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ e quindi sono uguali poichè hanno entrambi dimensione r. Inoltre si ha anche che $\langle e_1, \ldots, e_{n-r} \rangle \subseteq N(F)$ e quindi sono uguali poichè hanno entrambi dimensione $n-r$. Ma allora, dato che $e = \{e_1, \ldots, e_{n-r}, f_1, \ldots f_r\}$ è una base di V, si ha che $V = N(F) \oplus \mathrm{Im}(F)$.

(b) Supponiamo che $N(F) = \mathrm{Im}(F)$. Allora, per il teorema di rango-nullità,

$$n - r = \dim N(F) = \dim \mathrm{Im}(F) = r$$

da cui $n = 2r$. Sia $\{e_1, \ldots, e_r\}$ una base di $N(F)$. Allora, per $1 \leq i \leq r$ si ha che $e_i \in N(F) = \mathrm{Im}(F)$, quindi esistono $f_i \in V$ tali che

$$F(f_i) = e_i, 1 \leq i \leq r.$$

Asseriamo che $\{e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_r\}$ è una base di V. Infatti, dato che sono $2r = n$, basta dimostrare che sono linearmente indipendenti. Ora se

$$(*) \quad a_1 e_1 + \ldots + a_r e_r + b_1 f_1 + \ldots + b_r f_r = 0$$

applicando F otteniamo

$$0 = F(0) = F(a_1 e_1 + \ldots + a_r e_r + b_1 f_1 + \ldots + b_r f_r) = b_1 F(f_1) + \ldots + b_r F(f_r) = b_1 e_1 + \ldots + b_r e_r$$

da cui $b_1 = \ldots = b_r = 0$ e quindi, da $(*)$, anche $a_1 = \ldots = a_r = 0$. Dunque $n = 2r$ ed esiste una base $e = \{e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_r\}$ tale che

$$F(e_i) = 0, F(f_i) = e_i, 1 \leq i \leq r.$$

Viceversa, supponiamo che $n = 2r$ ed esiste una base $e = \{e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_r\}$ tale che

$$F(e_i) = 0, F(f_i) = e_i, 1 \leq i \leq r.$$

Allora chiaramente $\mathrm{Im}(F) = \langle e_1, \ldots, e_r \rangle \subseteq N(F)$ e quindi sono uguali poichè hanno entrambi dimensione $r = n - r$. ■