UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2022-2023

Seconda prova di esonero

TESTO

1. Sia $0 \neq k \in \mathbb{R}$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Sia F un endomorfismo di V tale che:

1) k è un autovalore di F e $V_k(F) = \langle e_1, e_1 + ke_2 \rangle$,

2) $F(e_3 - e_4) = -(k+1)e_4, F(e_4) = e_3 + ke_4$.

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Determinare tutti i k tali che esistono autovalori $\lambda \neq k$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$. Per ogni tale k, trovare una base per l'autospazio di F associato a tutti gli autovalori $\lambda \neq k$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate.

Sia S il sottospazio di giacitura $W = \langle e_1 - e_3, e_2 - e_3 \rangle$ e passante per il punto $Q = Q(1, 0, 0, 1)$ (coordinate nel riferimento affine dato). Si consideri il sistema

$$(*) : \begin{cases} X + Y + Z + W = 1 \\ X - Y + Z = 2 \\ X - 3Y + kZ - W = k + 2 \end{cases}$$

e sia

$$T_k = \{P = P(x, y, z, w) \in A : (x, y, z, w) \text{ è soluzione di } (*)\}.$$

(a) Determinare per quali k si ha che T_k è un sottospazio di A e, in tal caso, calcolarne la dimensione.

(b) Determinare i valori di k (se esistono) per i quali T_k è parallelo ad S.

(c) Determinare i valori di k (se esistono) per i quali esiste una retta r di A tale che r è parallela a T_k e $r \subset S$.

3. Siano n ed r due interi tali che $n \geq 1$ e $0 \leq r \leq n$. Siano V uno spazio vettoriale reale con $\dim V = n$ e sia $F : V \to V$ un'applicazione lineare con $r(F) = r$.

(a) Determinare, rispetto alla matrice di F in un'opportuna base di V, le condizioni necessarie e sufficienti affinchè sia $V = N(F) \oplus \mathrm{Im}(F)$.

(b) Determinare, rispetto a n, r e ad un'opportuna base di V, le condizioni necessarie e sufficienti affinchè sia $N(F) = \mathrm{Im}(F)$.