

TUTORATO 10

E 1

Si scrive l'equazione del piano π_i per $i=1,2,3$ in $A^3(\mathbb{R})$ soddisfacendo le seguenti proprietà:

1) π_1 passa per $A(2,4,0)$ ed è parallelo ai vettori $u=(1,0,1)$ e $v=(0,1,3)$

eq parametrica π_1 :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 2s \\ z = 0 + t + 3s \end{cases}$$

eq cartesiana π_1

Dalle eq parametriche otteniamo che

$$\begin{cases} t = -1 + x \\ s = \frac{1}{2}(y-1) \\ z = (-1+x) + \frac{3}{2}(y-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2z + 2 \cdot 2x - 3y + 3 = 0$$

$$\pi_1: +2x + 3y - 2z = 5$$

2) π_2 passa per $B(0,1,1)$ e $C(3,2,1)$ e
parallelo a $w=(0,0,5)$

Per trovare il piano passante per B e

con direzione $W = \langle \vec{BC}, w \rangle$

$$\vec{BC} = (3, 1, 0)$$

Per la
eq. cartesiana:
(metodo
determinante)

$$0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 5x - (y-1) \cdot 15 + (z-1) \cdot 0 =$$

$$= 5x - 15y + 15$$

eq contenute

$$\Pi_1: x - 3y = -3$$

3) Π_3 passa per $D(1, -2, -2)$ e parallelo alle rette

$$r: \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\text{se } \Pi_1 \parallel r \Rightarrow \text{gioc}(r) \subseteq \text{gioc}(\Pi_1)$$

$$\text{se } \Pi_1 \parallel s \Rightarrow \text{gioc}(s) \subseteq \text{gioc}(\Pi_1)$$

$$\Rightarrow \text{se } \begin{matrix} \text{gioc}(r) \neq \text{gioc}(s) \\ \parallel \qquad \qquad \parallel \\ W = \langle w \rangle \quad V = \langle v \rangle \end{matrix} \Rightarrow \text{gioc}(\Pi_1) \neq \langle v, w \rangle$$

calcoliamo $\text{gioc}(r)$ e $\text{gioc}(s)$

per le eq. param di r e s

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 4 - 2 + t \\ z = 5 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \text{gioc}(r) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$s: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{gioc}(s) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Notiamo v e w sono linearmente indep $\Rightarrow$ es: $U = \langle v, w \rangle$

Π_3 è il sottospazio affine $\int_{D, U}$

$$\text{eq contenute } \Pi_3: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-2) + -(y+1) + (z+2) = x+z+1$$

$$\Rightarrow \pi_3: x+z+1=0$$

ES 3

S.d. Δ un s.p. che si dim. 4 e s.d. O_1, O_2, O_3, O_4
in riferimento

1) Calcolare le equazioni cartesiane del sottospazio che S
passa per $Q(0,1,0,-1)$ e che è generato
dal sottospazio generato dai vettori

$$V = 6P_1 + 2P_2 + 2P_3 + P_4 \quad \text{e} \quad W = P_2$$

2) Osservando che vogliamo calcolare un s.p. di
dimensione 2 in un s.p. di dimensione 4

$\Rightarrow$ lo fanno con tre equazioni e costruiscono due equazioni.

• la forma canonica :

$$\begin{cases} x_1 = 0 + 6t + s \\ x_2 = 1 + 2t + s \\ x_3 = 0 + 2t \\ x_4 = -1 + t \end{cases}$$

• FORMA CARTESIANA : Dato la forma canonica

$$\begin{pmatrix} x_2 - 0 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 0 \\ x_4 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s$$

$\begin{matrix} \parallel & \parallel & \parallel \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix}$

$\Rightarrow v_1$ è dipendente da v_2 e v_3

$$\Rightarrow \text{r} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 - 1 & x_3 & x_4 + 1 \\ 6 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow \det \text{Minori } (3 \times 3) = 0 \Rightarrow$ la forma
canonica è
giusta che

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x_1 & x_2-1 & x_u+1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_2-1 & x_3 & x_u+1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 6(x_u+1) = 0 \\ x_3 - 2(x_u+1) = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} -x_1 + 6x_u = -6 \\ x_3 - 2x_u = 2 \end{cases}$$

2) S.e. T il sottospazio affine di equazioni

$$T: \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_u = 2 \end{cases}$$

S.e. $11 \perp T$?

Siamo le eq. per T :

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = 2 - t - s \\ x_4 = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{gioc}(T) \ni (1, 0, -1, 1), (0, 1, -1, 0)$$

$v_1 \qquad v_2$

Abbiamo che $\dim \text{gioc}(T) = \dim \text{gioc}(S)$

$\Rightarrow$ sono paralleli $(\Rightarrow \text{gioc}(T) = \text{gioc}(S))$

Per vederne uno uguale vederne per esempio che

$v_1 \in \text{gioc}(S)$ (e che quindi si può sempre
come combinazione lineare
dei vettori di S)

è che indipendente

$v_1 \in \text{gioc}(S)$

$\hookrightarrow$ ovvero che $\exists a, b$ tali che

$$v_1 = a \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Seguendo i calcoli si ottiene che $T \parallel S$

ES 4

S. consid. in lo spazio affine reale $A^3(\mathbb{R})$
 1) p.e. r lo retto cui eq. espressione

$$r = \begin{cases} x+z+2=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Det le eq. parametriche di r:

$$r: \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=-2-t \end{cases}$$

$$2) \text{ p.e. } s: \begin{cases} y+3=0 \\ x+1=0 \end{cases}$$

Da se r e s sono parallele, sghembe o incidenti.

Nel cui risultato incidenti determinare il punto di intersezione

p.e. A la matrice le cui righe sono determinate dai coefficienti dei piani che individuano le due rette r e s

Allora abbiamo che le rette sono complanari $\Leftrightarrow \det(A)=0$

In quanto come si vede qui:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5$$

$\Rightarrow$ r e s sono sghembe

3) Determinare le equazioni contenute della retta r complanare con le rette r e s passanti per il punto

$$P(2, 1, -2)$$

- Suppono che τ in un certo piano p' tale che p' contiene sia la retta z che il punto P (equivalentemente che esiste un unico piano p'' tale che p'' contiene sia la retta s che il punto P).
 Inoltre p' e p'' sono distinti (altrimenti r e s sarebbero complanari) e hanno un punto in comune $\Rightarrow p' \cap p'' = \tau$ come richiesto.
- Utilizziamo il fascio proprio di piani di asse h

$$\lambda(x+z+2) + \mu(x+y+z) = 0$$

impongo il passaggio per il punto P e ottengo

$$3\lambda + 2\mu = 0 \Rightarrow \text{scelgo } \lambda = -2 \text{ e } \mu = 3$$

(sostituendo bene qualsiasi valore di λ e μ che risolvevano l'equazione).

$$\Rightarrow \text{Trovo il piano } p': x + 3y + z - 4 = 0$$

- Ripetiamo analogamente con la retta s

Scrivo il fascio proprio di piani di asse h

$$\lambda(y+z) + \mu(z+1) = 0$$

e impongo il passaggio per il punto P

$$\text{e ottengo } 4\lambda + 3\mu = 0$$

$$\Rightarrow p'': 4x - 3y - 5 = 0$$

Allora le eq. contenute in $\tau = p' \cap p''$

$$\begin{cases} x + 3y + z - 4 = 0 \\ 4x - 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

4) Determinare la eq. parametrica della retta q
passante per il punto $Q(2, -1, -1)$ e parallela
al vettore $v = (1, 2, 3)$

eq. param. di q :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

eq. cartes. di q :

↳ ottenere omogeneando
due righe della
matrice A

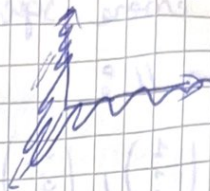
$$A = \begin{pmatrix} x-2 & y+1 & z+1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si ottiene

$$\begin{cases} 5x + z - 9 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$$

E) Determinare la posizione reciproca delle seguenti in A^3_R

oss: in $A^3(R)$ abbiamo che



• DUE RETTE:

• O SONO COINCIDENTI (sono contenute in uno stesso piano e quindi sono parallele e incidenti).

(sono parallele e incidenti allora coincidenti)

• OPPURE SONO SCETTICHE

• Retta e Piano:

• O LA RETTA È CONTENUTA NEL PIANO (INCIDENTI)

• LA RETTA NON È CONTENUTA NEL PIANO

- Allora o sono //

- OPPURE SONO INCIDENTI

• DUE PIANI:

- PARALLELI e distinti

- PARALLELI e coincidenti

- OPPURE SI INTERSECAVO (e FORMANO UNA RETTA)

- MAI SCETTICHE

$$1) \pi: x+3y+z=2 \quad e \quad r: \begin{cases} x+z=3 \\ x+2y+z=0 \end{cases} \quad \sim) r: \begin{cases} x=3-z \\ y=3/2 \\ z=z \end{cases}$$

- vediamo se $r \subseteq \pi$:

$$(3-z) + 3\left(\frac{3}{2}\right) + z = 2 \quad (\Leftrightarrow) \quad 3 + \frac{9}{2} = 2 \quad NO \Rightarrow \text{RETTO NO NEL PIANO}$$

- vediamo se $r // \pi$

$$goe(r) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad goe(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \sim)$$

$$\begin{cases} x = -3\tau - 5 \\ y = \tau \\ z = 5 \end{cases}$$

$$\text{gioc}(\pi) = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{ora } \text{gioc}(r) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{v}{=} \in \text{gioc}(\pi) ?$$

si può dire generatore r appartiene a $\text{gioc}(\pi)$

ovvero si può scrivere come combinazione lineare

$$r = 0 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \pi: x + 3y + z = 2 \quad e \quad r = \begin{cases} x = 2 + 3\tau \\ y = 1 + 5\tau \\ z = 4 \end{cases}$$

verificare se r è contenuto in π :

$$(2 + 3\tau) + 3(1 + 5\tau) + 4 = 2 \Leftrightarrow 2 + 3\tau + 3 + 15\tau + 4 = 2$$

$$\Leftrightarrow 8\tau = -7 \quad \Rightarrow \quad \tau = -7/8 \quad \Rightarrow \quad r \notin \pi$$

$$3) r = \begin{cases} x = 1 + 3\tau \\ y = 1 + 5\tau \\ z = \tau \end{cases} \quad e \quad s = \begin{cases} x = 5 + 3\tau \\ y = 6 + 5\tau \\ z = 1 + \tau \end{cases}$$

$$\text{verificare se } s \parallel r: \text{gioc}(r) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \text{gioc}(s) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow s \parallel r$

ES 6

Stobliare

se le seguenti applicazioni sono lineari
 oppure come $F(x, y) = (x+y, 2x-y, y)$

1) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Sia $v, w \in \mathbb{R}^2$

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $c, d \in \mathbb{R}$

Verifichiamo che $F(c v + d w) = c F(v) + d F(w)$

• $F(c v + d w) = F\left(c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} c x \\ c y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d x' \\ d y' \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} c x + d x' \\ c y + d y' \end{pmatrix}\right) =$
 $= (c x + d x' + c y + d y', 2(c x + d x') - (c y + d y'), c y + d y') =$

$\downarrow$
 def
 F

$= (c x + c y, 2 c x - c y, c y) + (d x' + d y', 2 d x' - d y', d y')$

$= c(x+y, 2x-y, y) + d(x'+y', 2x'-y', y') =$

$= c F(v) + d F(w) \Rightarrow F \text{ è lineare}$

2) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito come $F(x, y) = (x+y+1, 2x-y, y^2)$

F non è lineare: vediamo che $F(\lambda v) \neq \lambda F(v)$, $v = (x, y)$

$$F(\lambda v) = F(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y + 1, 2\lambda x - \lambda y, \lambda^2 y^2)$$

$$\lambda F(v) = \lambda F(x, y) = \lambda(x+y+1, 2x-y, y^2) = (\lambda x + \lambda y + \lambda, 2\lambda x - \lambda y, \lambda y^2)$$

3) $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $F(x, y, z) = (2z-x, x+y, x+2y+2z)$

• $F(v+v') = F(v) + F(v') \quad \forall v, v' \in \mathbb{R}^3$

s.c. $v = (x, y, z) \quad v' = (x', y', z')$

$$\begin{aligned} F(v+v') &= F((x, y, z) + (x', y', z')) = F(x+x', y+y', z+z') = \\ &= (2(z+z') - (x+x'), (x+x') + (y+y'), (x+x') + 2(y+y') + 2(z+z')) = \\ &= (2z+2z' - x - x', x+x' + y+y', x+x' + 2y+2y' + 2z+2z') = \\ &= (2z-x, x+y, x+2y+2z) + (2z'-x', x'+y', x'+2y'+2z') = \\ &= F(v) + F(v') \end{aligned}$$

• $F(cv) = cF(v) \quad \forall c \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^3$. s.c. $v = (x, y, z)$

$$\begin{aligned} F(cv) &= F(c(x, y, z)) = F(cx, cy, cz) = \\ &= (2cz - cx, cx+cy, cx+2cy+2cz) = \\ &= c(2z-x, x+y, x+2y+2z) = cF(v) \end{aligned}$$

4) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definito con $F(x, y) = (x-2y, 2x+y, 5y, 3x-y)$
 F è lineare (molto più 3)

5) $F: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ definito da $F(x) = x + x^t$

• $F(x+y) = F(x) + F(y) \quad \forall x, y \in M_2(\mathbb{R})$

$$F(x+y) = (x+y) + (x+y)^t =$$

$$= x+y + x^t + y^t =$$

$$= x+x^t + y+y^t = F(x) + F(y)$$

↓
 poiché 2×2 e
 operano in $\mathbb{R}$

$$F(ax) = aF(x)$$

$$F(ax) = ax + (ax)^F = ax + ax^F = a(x + x^F) = aF(x)$$

$$b) F: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$$

$$(\text{Ric. } \mathbb{R}_3[x] = \{ \text{polinomi di grado} \leq 3 \text{ a coefficienti in } \mathbb{R} \})$$

$$\forall p, q \in \mathbb{R}_3[x]$$

$$f(p+q) = x(p+q)'(x) = x p'(x) + x q'(x) = f(p) + f(q)$$

$$f(ap) = x(ap)'(x) = x a p'(x) = a x p'(x) = a f(p)$$

$$\text{Es. 7.10 } F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Sullo base canonica

$$F(e_1) = (1, 2, 1)$$

$$F(e_2) = (4, 0, 1)$$

$$\text{1) Esplorare } F(x, y):$$

$$\text{Sia } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calcoliamo } F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = F\left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + y F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4y \\ x+2y \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F(x, y) = (x+4y, x+2y, x+y)$$

$$\text{2) Problema se } (0, 0, 0), (3, 4, 1), (3, 2, 0) \in \text{Im}(F)$$

$$\text{Sia } \text{Im}(F) = \{ F(x, y) : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$\Rightarrow (a, b, c) \in \text{Im}(F) \Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tale che}$$

$$(a, b, c) = F(x, y)$$

$$(Ora (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (\text{come prima}) (x, y) = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$\Leftrightarrow (a, b, c) = x F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + y F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x F(e_1) + y F(e_2)$$

$$\Leftrightarrow (a, b, c) \in \langle F(e_1), F(e_2) \rangle \Rightarrow \text{Im}(F) = \langle F(e_1), F(e_2) \rangle$$

$$\Rightarrow \text{Im}(F) = \langle (1, 2, 1), (4, 0, 1) \rangle$$

• $(0, 0, 0) \in \text{Im}(F)$ si poiché $\text{Im}(F)$ è un sottospazio vettoriale.

• $(3, 4, 1) \in \text{Im}(F) \Leftrightarrow (3, 4, 1) \in \langle (1, 2, 1), (4, 0, 1) \rangle$

$\Leftrightarrow (3, 4, 1)$ si può scrivere come combinazione lineare di v_1 e v_2 . • $\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quindi ci riduciamo a risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = 3 \\ 2\lambda_1 = 4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Svolgiamo i calcoli
S. ottiene che il sistema
non è risolvibile
 $\Rightarrow (3, 4, 1) \notin \text{Im}(F)$

$$(3, -2, 0) \in \text{Im}(F) ?$$

che può ci ridurremo a risolvere il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = 3 \\ 2\lambda_1 = -2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Svolgiamo i calcoli s. ottiene
 $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, 1)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (3, -2, 0) \in \text{Im}(F)$$