

MATRICI E APPUNZIONI LINEARI

Vogliamo provare che, scelta una base, ad ogni applicazione lineare f associata una matrice che cambia se cambiamo la base

Siano V, W due spazi vettoriali con $\dim V = n$ e $\dim W = m$, e sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare.

Siano rispettivamente $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W

Presa la base B di V consideriamo l'immagine dei vettori $v_1, \dots, v_n$ tramite f

ovvero consideriamo $f(v_1), \dots, f(v_n)$

Ora abbiamo che $f(v_i) \in W \quad \forall i=1, \dots, n$

$\Rightarrow$ può essere scritto come combinazione lineare dei vettori della base B' ovvero

$$f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m = \sum_{i=1}^m a_{i1}w_i$$

$$f(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m = \sum_{i=1}^m a_{i2}w_i$$

$$f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m = \sum_{i=1}^m a_{in}w_i$$

Consideriamo la matrice che ha come colonne le componenti dei vettori $f(v_1), \dots, f(v_n)$

ed otteniamo

$$M_{B', B}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ coordinate di $f(v_1)$ nella base $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$

$$[f(v_i)]_{B'} = (a_{1i}, \dots, a_{mi})$$

Coordinate di $f(v_i)$ nella base B'

$$\Rightarrow M_{B', B}(f) = ([f(v_1)]_{B'} : \dots : [f(v_n)]_{B'})$$

Vediamo come lo esponente della matrice $A = M_{B', B}(f)$ permette di calcolare l'immagine di ogni vettore v

Se $v \in V \Rightarrow v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_m v_m$

Per conoscere il vettore è sufficiente conoscere le sue componenti $x_1, \dots, x_m$.

$\Rightarrow$ Possiamo identificare il vettore v con la vettore delle sue coordinate $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ rispetto alla base B .

Consideriamo il vettore $f(v)$, dove f è visto anche come una combinazione lineare dei vettori della base B .

$$f(v) = x_1' w_1 + x_2' w_2 + \dots + x_m' w_m$$

e le sue coordinate $\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix} = x'$

Ci chiediamo che relazione c'è tra x e x' ?

Quello che otteniamo è che $x' = A x$ dove $A = P_{B'B}$

Verifichiamo

$$f(x) = f(v_1 x_1 + \dots + v_m x_m) = x_1 f(v_1) + \dots + x_m f(v_m) =$$

$$= x_1 \left(\sum_{i=1}^m a_{i1} w_i \right) + \dots + x_m \left(\sum_{i=1}^m a_{im} w_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^m (a_{i1} x_1 + \dots + a_{im} x_m) w_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right) w_i$$

Confrontando con $f(v) = x_1' w_1 + x_2' w_2 + \dots + x_m' w_m = \sum_{i=1}^m x_i' w_i$

$$\Rightarrow x_i' = \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \quad i=1, 2, \dots, m$$

Per farlo per intero

$$\begin{cases} x_1' = a_{11} x_1 + \dots + a_{1m} x_m \\ \vdots \\ x_m' = a_{m1} x_1 + \dots + a_{mm} x_m \end{cases} \quad \sim$$

→ Im base di NOTICE

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \text{"A"} \\ \text{"B"} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \text{"X"} \\ \text{"X"} \end{matrix}$

B) RIECAPITOLANDO Dato $A = M_{B'B}(f)$

Per calcolare l'immagine di $v \in V$, penso v come
combinazione lineare dei vettori di $B \rightarrow$ prendo le coordinate
 $(x_1, \dots, x_m)$ e faccio Ax e quello che ottengo

$Ax = x'$ e x' dove x' sono le coordinate
 $\begin{matrix} \text{"X"} \\ \text{"X"} \end{matrix}$
 $(x_1', \dots, x_m')$

di $f(v)$ nella base B' .

se poi voglio scrivere $f(v) = x_1'w_1 + x_2'w_2 + \dots + x_m'w_m$

M

TUT 11

ES 1

sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(f) \quad \text{dove}$$

$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
è la base canonica di $\mathbb{R}^4$

In generale si ha che $\dim(\text{Im}(f)) = r(A)$
dove A è la matrice associata ad f , mentre
 $\dim(\text{Ker}(f)) = n - \dim(\text{Im}(f))$ dove n è la dimensione
del dominio.

Imponi s.a. $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$
e s.a. $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

$$\Rightarrow v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ora f è lineare $\Rightarrow$

$$f(v) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + x_3 f(e_3) + x_4 f(e_4)$$

$\Rightarrow f(v)$ è combinazione lineare dei vettori immagine della
base canonica ossia $\text{Im}(f) = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4) \rangle$

Tuttavia queste costituiscono le colonne della
matrice associata ad $f \Rightarrow \dim(\text{Im}(f)) = r(A)$

- In questo caso $\det(A) = u \neq 0 \Rightarrow$ la matrice ha
rango $n \times n \Rightarrow \dim(\text{Im}(f)) = n \Rightarrow \dim(\text{Ker}(f)) = 0$

$$\Rightarrow \text{Im}(F) = \langle (1, 2, 1), (4, 0, 1) \rangle$$

• $(0, 0, 0) \in \text{Im}(F)$ si poiché $\text{Im}(F)$ è un sottospazio vettoriale.

• $(3, 4, 1) \in \text{Im}(F) \Leftrightarrow (3, 4, 1) \in \langle (1, 2, 1), (4, 0, 1) \rangle$

$\Leftrightarrow (3, 4, 1)$ si può scrivere come combinazione lineare di v_1 e v_2 . • $\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quindi ci riduciamo a risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = 3 \\ 2\lambda_1 = 4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Svolgiamo i calcoli
S. ottiene che il sistema
non è risolubile
 $\Rightarrow (3, 4, 1) \notin \text{Im } F$

• $(3, -2, 0) \in \text{Im}(F)$?

Come prima ci riduciamo a risolvere il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = 3 \\ 2\lambda_1 = -2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Svolgiamo i calcoli s. ottiene

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, 1)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (3, -2, 0) \in \text{Im}(F)$$

ES 2

Verificare che le seguenti applicazioni sono LINEARI
e determinare NUCLEO e IMMAGINE.

1) $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita come $(x, y, z) \mapsto (2z - x, x + y, x + 2y + z)$
(esprimere es 6 TUT 10)

Come già osservato nell'esercizio PRECEDENTE
Abbiamo che $\text{Im}(F) = \langle F(e_1), F(e_2), F(e_3) \rangle =$

$$= \langle \underset{v_1}{(-1, 1, 1)}, \underset{v_2}{(0, 1, 2)}, \underset{v_3}{(2, 0, 2)} \rangle$$

Calcoliamo la $\dim \text{Im } F$ Abbiamo che $\dim \text{Im } F$
è il numero massimo di vettori LIN. INDIP.
tra $v_1, v_2, v_3 \Rightarrow$ è il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ svolgendo i calcoli si ha}$$

$$\text{che } \text{r}(A) = 2 \Rightarrow \dim \text{Im}(F) = 2$$

Scegliamo come generatori $v_2, v_3 \Rightarrow$

$$\text{Im}(F) = \langle (0, 1, 2), (2, 0, 2) \rangle$$

Dal teorema di rango nullo abbiamo che
 $\dim V = \dim \text{Ker } F + \dim \text{Im } F \Rightarrow \dim \text{Ker } F = 3 - 2 = 1$

Es 2
1)

~~Definizione~~ Dato $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Se scegliamo come base di $\mathbb{R}^3$ la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$
l'operatore lineare $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sarà dato

$$\text{da } F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{dove } A = M_{e,e}(F)$$

$$x \mapsto Ax$$

$$\text{Ora } \text{Ker}(F) = \{x \in \mathbb{R}^3 : F(x) = 0\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\}$$

$\Leftrightarrow$

sono le soluzioni del sistema omogeneo

$$Ax = 0 \quad \text{dove abbiamo}$$

avuto che

$$A = M_{e,e}(F)$$

$\downarrow$
osservare che ha
per colonne le immagini
di $F(e_1), F(e_2), F(e_3)$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Risolvendo il sistema omogeneo tramite il Metodo
di Gauss-Jordan si ottiene

$$\text{E } \text{Ker}(F) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) = (t, -t, t/2) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

2) $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito come $(x, y, z) \mapsto (3x + y + 2z, -x - y - z, x + z)$

Cominciamo con la verifica che F è un'operatore lineare

Presi $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ e $w = (d, e, f) \in \mathbb{R}^3$ abbiamo

$$F(v+w) = F(a+d, b+e, c+f) =$$

$$= (3(a+d) + (b+e) + 2(c+f), -(a+d) - (b+e) - (c+f), (a+d) + (c+f))$$

$$= ((3a+b+2c) + (a+e+2f), -(a+b+c) + (-1, -2d-2e), (a+d) + (c+f))$$

$$= (3a+b+2c, -a-b-c, a+d) + (3a+e+2f, -f-2d-2e, d+f) =$$

$$F(v) + F(w)$$

Inoltre abbiamo che per $k \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^3$ con $v = (a, b, c)$

$$F(kv) = F(ka, kb, kc) = (3ka + kb + 2kc, -ka - 2kb - kc, kc + ka) = \\ = (k(3a + b + 2c), k(-a - 2b - c), k(c + a)) = k F(v)$$

Come nel caso precedente abbiamo che per k come base

$$\text{Im}(F) = \langle (3, -2, 1), (1, -2, 0), (2, -1, 1) \rangle$$

Si verifica che i 3 vettori sono linearmente indipendenti

$\Rightarrow \dim(\text{Im}(F)) = 3$ e per il teorema rango nullità

$$\text{Si ha che } \text{Ker}(F) = \{0\}$$

Analogamente si verifica che l'unico soluzione del

$$\text{sistema omogeneo } Ax = 0 \text{ è solo } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{dove } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow F$ è un isomorfismo.

$$c) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ definito come } (x, y, z) \rightarrow (x + y + z, x - y + z)$$

Si verifica che è lineare. Inoltre abbiamo che

Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$\text{abbiamo che } \text{Im}(F) = \langle F(e_1), F(e_2), F(e_3) \rangle =$$

$$= \langle (1, 1), (-1, 1), (-1, 1) \rangle =$$

$$= \langle (1, 1), (-1, 1) \rangle = \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \dim \text{Ker}(F) = 1$$

Se scegliamo $V = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$

e $W = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ base canonica di $\mathbb{R}^2$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Abbiamo che } M_{WV}(F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$\Rightarrow F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\underline{x} \longrightarrow A\underline{x}$$

$$\ker(F) = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : A\underline{x} = \underline{0} \}$$

$$A\underline{x} = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Applico Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ le sol del sistema e quindi il $\ker(F)$ è dato da

$$\ker(F) = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) = (0, t, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

d) $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definito come $(x, y) \mapsto (x-2y, 2x+y, 5y, 3x-y)$

F è lineare e $\text{Im}(F) = \langle (1, 2, 0, 3), (-2, 1, 5, -1) \rangle$

e

$$\ker(F) = (0, 0).$$

Es 3

Priore ve W è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$

$$V = \{ \overset{v_1}{(1, -1, -1)}, \overset{v_2}{(1, -1, 1)}, \overset{v_3}{(1, -2, -1, 1)} \}$$

$$W = \{ \overset{w_1}{(1, 1, 1, 0)}, \overset{w_2}{(1, 0, 1, 1)}, \overset{w_3}{(2, 1, 0, 1)}, \overset{w_4}{(0, 1, 1, 2)} \}$$

e F, G, H, I le seguenti applicazioni lineari.

1) $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito come $F(x, y, z) = (x+y, y+z, x+z)$

Determinare le potenze associate e tutti gli operatori

$$M_V(F) = M_{V,V}(F)$$

↓
NOTAZIONE
SQUATA

DUE METODI

$$1) M_V(F) = M_{V,E}(I) M_E(F) M_{E,V}(I) = (M_{E,V}(I))^{-1} M_E(F) M_{E,V}(I)$$

dove E è la base canonica su $\mathbb{R}^3$ e

$M_{E,V}(I)$ è la matrice del cambiamento di base dalla base V alla base canonica E , dove $M_{E,V}(I)$ si ottiene mettendo per colonne le coordinate dei vettori di V rispetto alla base canonica (ed $M_{V,E}(I) = (M_{E,V}(I))^{-1}$)

$$\bullet M_{E,V}(I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ Poich\'e}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{coordinate} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$e_1 \quad e_2 \quad e_3$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 e_1 + 1 e_2 - 1 e_3 \rightarrow \text{coordinate} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e analizziamo v_3

(Rispetto alla base canonica le coordinate corrispondono al vettore stesso!)

$$\bullet \text{ Si calcola } (M_{E,V}(I))^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{ Inoltre } M_E(F) = M_{E,E}(F) = \sim$$

$M_{ee}(F)$ sono le coordinate di $F(e_1), F(e_2), F(e_3)$ rispetto alla base canonica e_1, e_2, e_3 ,
(che quindi corrispondono ad $F(e_1), F(e_2), F(e_3)$)

Freccia per colonna

con questo nome indico le colonne

$$M_{ee}(F) = ([F(e_1)]_e \mid [F(e_2)]_e \mid [F(e_3)]_e) =$$

$$= (F(e_1) \mid F(e_2) \mid F(e_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

o.e

$$M_v(F) = (M_{ev} I)^{-1} M_e(F) M_{ev} I =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $M_v(F) = M_{vv}(F) = ([F(v_1)]_v \mid [F(v_2)]_v \mid [F(v_3)]_v)$

dove $[F(v_i)]_v$ sono le coordinate di $F(v_i)$ nella base $V = \{v_1, v_2, v_3\}$

$$F(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} v_1 + 0 \cdot v_2 + \frac{3}{2} v_3$$

qui moltiplico
sotto il valore

$$F(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} v_1 + \frac{4}{2} v_2 + \frac{1}{2} v_3$$

$$F(v_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} v_1 + \frac{2}{2} v_2 + \frac{1}{2} v_3$$

$$\Rightarrow M_{V(P)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$G(x, y, z) = (x + y + z, y, -2x - 2z, x + 2y + 3z)$$

• Analizziamo la forma polinomiale

$$M_{W,V}(G) = ([G(v_1)]_W : [G(v_2)]_W : [G(v_3)]_W)$$

dove $G(v_i) \in \mathbb{R}^4$ e $[G(v_i)]_W$ sono quindi le coordinate di $G(v_i)$ nella base W

• Per calcolare $M_{W,V}(G)$ usiamo però la matrice del cambiamento di base

$$M_{W,V}(G) = M_{W,e'}(I) \cdot M_{e',e}(G) \cdot M_{e,V}(I)$$

dove e è la base canonica di $\mathbb{R}^3$

e e' è la base canonica di $\mathbb{R}^4$

(si ha che $M_{W,e'}(I) = (M_{e',W})^{-1}$) e analogamente

$$M_{W,V}(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 8 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \\ -6 & -20 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet H: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad H(x, y, t, w) = (y-2, 2x-2t, w)$$

$$M_{V, W}(H) = M_{V, e}(I) M_{e, e}(H) M_{e, W}(I) =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet I: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad I(x, y, t, w) = (x-2+2w, y+w, x-1+t, 3x)$$

$$M_W(I) = M_{W, e}(I) M_{e, W}(I) = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4

$$\Pi_3 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 : a_i \in \mathbb{R}\}$$

$$F: \Pi_3 \rightarrow \Pi_3$$

$$x^m \mapsto m x^{m-1} \quad \text{per } m=0, 1, 2, 3$$

Calcolare nucleo e immagine e trovare

$\ker(F)$ e $\text{Im}(F)$

a e b le basi canonica $e = \{1, x, x^2, x^3\}$

e b è la base $b = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$

Sopponiamo che $1, x, x^2, x^3$ costituisca una base di Π_3

d'operazione è definito come

$$F(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

$$\Rightarrow F(P(x)) = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0 \Rightarrow \text{Il Nucleo}$$

è costituito dai tutti i polinomi costanti

$$\text{cioè } \ker F = \mathbb{R}.$$

Per l'immagine notiamo che il valore di a_1, a_2, a_3 si tiene tutti e soli i polinomi di grado ≤ 2

$$\Rightarrow \text{Im}(F) = \Pi_2$$

Altro modo di vedere $\ker(F)$ da $P = 1, x, x^2, x^3$

$$\text{Notiamo che } \Pi_3 \longleftrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \longleftrightarrow (a_0, a_1, a_2, a_3)$$

e in isomorfismo di spazi vettoriali

$\Rightarrow$ ad ogni vettore polinomio in Π_3 possiamo associare

il vettore dei coefficienti (a_0, a_1, a_2, a_3)

In questi termini ad

$$1 \text{ (polinomio costante = 1)} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^3 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F: \Pi_3 \longrightarrow \Pi_3$$

$$x^n \longrightarrow n x^{n-1} \quad \text{ovvero} \quad n=0, 1, 2, 3$$

$$F: \Pi_3 \longrightarrow \Pi_3$$

$$x^0 = 1 \longrightarrow 0 =$$

$$x \longrightarrow 1 \quad \leftarrow$$

$$x^2 \longrightarrow 2x$$

$$x^3 \longrightarrow 3x^2$$

forme canonique

$$F: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_B(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e pour une calculer
ker(F) e Im(F),
cane n'ay es piece

Calculer

$$M_B(F) = (M_{e,b}(I))^{-1} M_{e,b}(F) M_{e,b}(I) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(donc $b = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$
est une base de $\mathbb{R}^4$)

$$b = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Es 5

Sia e_1, e_2, e_3, e_4 una base di $\mathbb{R}^4$.

Mostare che non può esistere un'operazione lineare

$T \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ tale che

$$T(e_1 + e_3) = e_2 \quad T(e_2 + e_4) = e_2 \quad T(e_1 + e_2) = e_3$$

$$T(e_3 + e_4) = e_4$$

sol

una proprietà dell'operazione lineare è che vettori
elementi di $\mathcal{P}$ vengono mandati in vettori elementari di $\mathcal{P}$

ma in questo caso abbiamo che

$e_1 + e_3, e_2 + e_4, e_1 + e_2, e_3 + e_4$ sono elementi di $\mathcal{P}$

però

e_1, e_2, e_3, e_4 sono LIN INDIP.

Es 6

Sia f l'operazione lineare di $\mathbb{R}^3$ cui, associata

alla base canonica è associata la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix} \quad h \in \mathbb{R}$$

- Trovare valori di h per cui non invertibile

Ricordando che f non è 0 se e solo se $\det(C) \neq 0$

non è MAX $\Leftrightarrow \det(C) = 0$

$$\det(C) = 3h - 6 \Rightarrow \det(C) = 0 \Leftrightarrow h = 2$$

*) Dato $h = 2$ $\det \text{Im}(f)$

$$\dim(\text{Im}(f)) = \tau(C) = 2 \quad (\text{di rango 2})$$

Es 5) L'immagine è generata da due vettori lineari
indip, in quanto lo du del sottospazio è 2
(e bene qualsiasi coppia di vettori forati siano
linearmente indep)

$$\Rightarrow \text{Im}(f) = \langle (2, 1, -1), (1, 2, 1) \rangle$$

2) Determina per quali valori $k \in \mathbb{R}$ i vettori

$$(1, k^2, -k, k) \in \text{Im}(f)$$

$\Downarrow$

$v \in \text{Im}(f)$ se può essere scritto come combinazione
lineare dei vettori della base ovvero se

$$\text{rk}(A) = 2 \quad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k^2 - k \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$$\text{rk}(A) = 2 \Leftrightarrow \det(A) = 0$$

$\Downarrow$ quindi esso è un se e solo se

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow k = 1 \pm \sqrt{2} \quad \text{e per tali valori}$$

$$v \in \text{Im}(f)$$

3) Determinare un vettore che non ha componenti

Sfrutto il fatto che è sostituisco al vettore v
un valore di $k \neq 1 \pm \sqrt{2}$

$$\text{se } k = 1 \Rightarrow \text{il vettore } (1, 0, 1) \notin \text{Im}(f)$$

4) Determinare $\ker(f)$:

$$\text{saprei q.e. che } \dim(\ker f) = 1$$

Risolvendo il sistema $Cx = 0$ si trova $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (e il

$$\Rightarrow \ker(f) = \langle (1, -1, 1) \rangle$$

5) Verificare che $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$

Posso verificare che i vettori della base della spora $\text{Im}(f)$ sono indip dal vettore che genera $\ker(f)$

6) $\exists$ vettori $u \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(u) = (3, 2, -2)$

Per farlo dobbiamo mostrare che $(3, 2, 2) \in \text{Im}(f)$ e occorre se e solo se i vettori possono essere scritti come comb. lineare nella base e se questi è lineare dip da questi.

Quindi considero $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

dove i primi due vettori danno i vettori della base di $\text{Im}(f)$ mentre l'ultimo è il vettore dato.

Si ha $\det(B) = 7 \Rightarrow (3, 2, 2)$ è indep dai vettori di $\text{Im}(f) \Rightarrow (3, 2, 2) \notin \text{Im}(f)$

$\Rightarrow \nexists u \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(u) = (3, 2, -2)$

7) Trovare i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che
 $f(v) = f(x)$ dove $f(x) = (1, 2, -1)$

~~Ma~~ per

Voglio che $f(v) = (1, 2, -1) \Rightarrow v$

benno fissare il sistema nel Origine ~

Nel nostro caso

$$\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U) = 4 - 1 = 3$$

$$\downarrow$$
$$(V = \mathbb{R}_3[x] \Rightarrow V \cong \mathbb{R}^4_2 \text{ con } V = U)$$

(Ragioner come es. 4)

$$2) \text{ Dato } p(x) = 2x^3 - x + 3 \quad \text{e} \quad q(x) = 9x^3 + 5x^2 - 2x + 6 \in V$$

allora $\dim(\text{span}\{p(x), q(x)\})$

$$p(x) \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad q(x) \mapsto \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

i vettori non sono proporzionali $\Rightarrow$ i polinomi
non sono proporzionali $\Rightarrow$ allora $\dim(\text{span}\{p, q\}) = 2$

$$3) \text{ Dato } \pi: V \longrightarrow V/U \text{ la proiezione canonica}$$
$$\text{e dato } p(x) \longrightarrow [p(x)] = \pi(p(x))$$

$$\text{e dato } [q(x)] = \pi(q(x))$$

Si chiede se $[q(x)] \in \text{span}\{[p(x)]\}$

$$\bullet \text{ span}\{[p(x)]\} = \langle [p(x)] \rangle = \{ \underset{\parallel}{[p(x)]} \tau \mid \tau \in \mathbb{R} \}$$

$$\Rightarrow [q(x)] \in \text{span}\{[p(x)]\} \Leftrightarrow \exists \tau \in \mathbb{R}$$

$$\text{tale che } [q(x)] = [\tau p(x)] \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ tale che } u = q(x) - t p(x) \in U$$

Notiamo che $q(x) - 2p(x) = 5x^3 + 5x^2 = 5(x^3 + x^2) \in U$

$$\Rightarrow [q(x)] = [2p(x)] = 2[p(x)] \Rightarrow [q(x)] \in \text{span}\{p(x)\}$$

C.V.O.

ES 1

f.e. f è l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica
mondata della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Determinare $\text{Ker}(f)$, $\text{Im}(f)$ e una base per ciascuno dei quali.
P.e. $e = e_1, e_2, e_3$ la base canonica

$$\Rightarrow A = M_{B,B}(f)$$

$$\Rightarrow f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x \mapsto Ax$$

$$\Rightarrow \text{Ker}(f) = \{ \text{soluzioni del sistema omogeneo } Ax = 0 \}$$

$$\text{RM} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riduco la matrice tramite le operazioni di Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

sistema
omogeneo

$$\text{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \dim \text{Ker } f = 1$$

$$\Rightarrow \dim \text{Im}(f) = 2 = r(A)$$

$$\text{Ora } \text{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \xrightarrow{\text{so che uno è 2}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

RELI
DUE
COLONNE
INDIP.

3) Determina $f^{-1}(13, -1, 2)$

$$f^{-1}(13, -1, 2) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (13, -1, 2) \}$$

$$\text{Ora } f(x, y, z) = (13, -1, 2) \Leftrightarrow Ax = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ con } x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = -3 \\ 2x - y = -1 \\ 2x + 2z = 2 \end{cases}$$

Svolgo il metodo di Cramer e si ottiene $r(A) \neq r(A|b)$

dove $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ nel p.c.e. Cramer il sistema è incompatibile

$$\Rightarrow f^{-1}(13, -1, 2) = \emptyset$$