TUTORATO 12

Es 1

Trovare gli autovalori e autovettori delle seguenti matrici

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calcolo il polinomio caratteristico e ottengo che le sue radici sono

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$, $\lambda_3 = 2 + \sqrt{2}$

AUTOVETTORI

Dato λ_i autovalore $\Rightarrow \exists\, v_{\lambda_i}$ che e'

$$A v_{\lambda_i} = \lambda_i v_{\lambda_i} \iff (A - \lambda_i I_v) v_{\lambda_i} = 0$$

$\Rightarrow$ Per calcolare v_{λ_i} calcolo

$\ker(A - \lambda_i I_v)$.

Svolgendo i calcoli si ottiene

$v_{\lambda_1} = (1, 0, -1)$, $v_{\lambda_2} = (1, \sqrt{2}, 1)$ e $v_{\lambda_3} = (1, -\sqrt{2}, 1)$

$mg(\lambda_1) + mg(\lambda_2) + mg(\lambda_3) = 1 + 1 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ è diagonalizzabile

2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Svolgendo i calcoli $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$

con autovettori

$v_{\lambda_1} = (0, 1, 0)$

$v_{\lambda_2} = \left(1, 0, -\frac{3 + \sqrt{17}}{4}\right)$

$v_{\lambda_3} = \left(1, 0, -\frac{3 - \sqrt{17}}{3}\right)$

$\Rightarrow$ B è diagonalizzabile come nel punto 1

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

In questo caso la matrice C ha solo due autovalori $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica uguale a 2 e $\lambda_2 = 0$ con molt. algebrica uguale a 1.

Si verifica facilmente che la somma delle molteplicità algebriche è uguale a $4 \neq 5$
$\Rightarrow$ non è diagonalizzabile

Es 2

Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è endomorfismo associato alla seguente matrice rispetto alla base canonica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dire se

1) F è iniettivo

F è iniettivo $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(A) = 0 \Leftrightarrow$

~~Rk~~ $\mathrm{Im}(F) = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \dim \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 3$

$\Leftrightarrow r(A) = 3 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$\det(A) = 0 \Rightarrow F$ non è iniettivo

2) $(1, 1, -1)$ è un autovettore di F

Il vettore $(1, 1, -1)$ è un autovettore di F

$\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^*$ tale che $A \cdot (1, 1, -1) = \lambda (1, 1, -1)$

Quindi verificare se $\exists\, \lambda$

3) 2 è un autovalore di F

2 è autovalore di F $\iff \exists\, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tale che $A \cdot v = 2v$

verificare se $\exists$ un tale v.

Es 3

Per ciascuno dei seguenti operatori lineari $F, G, H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ verificare se sono diagonalizzabili. In tal caso trovare una $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ di autovettori, scrivere la forma di passaggio da $M_e(*)$ a $M_b(*)$ (con $* = F, G, H$) dove $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica e verificare che quest'ultima è diagonale

- $F(x, y, z) = (x+z, -x+y, x+y)$

Scrivo la matrice associata rispetto alla base canonica

$$\to M_e(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolo il polinomio caratteristico che indico con $f(x)$

$$f(x) = \det(M_e(F) - x I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{pmatrix} =$$

$$= x^3 - 3x^3 + 2x = x(x-1)(x-2)$$

Ci sono 3 autovalori distinti $\Rightarrow$ F è diagonalizzabile

Per determinare una base di autovettori cerchiamo i generatori dei rispettivi autospazi cioè delle soluzioni dei sistemi omogenei

$$(M_e(F) - \lambda I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{per } \lambda = 0, 1, 2.$$

- Per $\lambda=0$ troviamo un sistema di soluzioni $\langle(1,1,-1)\rangle$
- Per $\lambda=1$ si ha $\langle(0,1,0)\rangle$
- e per $\lambda=2$ $\langle(1,-2,1)\rangle$

Quindi la base di autovettori è data da
$$\{(1,-1,1),(0,1,0),(1,-1,1)\}$$

Per passare dalla base canonica a quella composta da questi autovettori abbiamo che

$$M_b(F) = M_{b,e}(I_3)\, M_e(F)\, M_{e,b}(I_3)$$

che è una matrice diagonale

- $G(x,y,z) = (x+2z,\ 2x+y,\ x+y+z)$

Il polinomio caratteristico è dato da
$$f(x) = (x-3)(x^2+1)$$

Abbiamo un unico autovalore reale con molteplicità algebrica uguale a 1 $\Rightarrow$ la molteplicità algebrica dell'autospazio associato sarà 1
$\Rightarrow$ essendo la somma delle dimensioni degli autospazi strettamente minore dello spazio su cui G è definito si ha che G non è diagonalizzabile

- $H(x,y,t) = (x-y+2t,\ -x+y-t,\ 2x+y+t)$

Il pol caratteristico è $f(x) = (x-1)(x+1)(x-3)$
$\Rightarrow$ Abbiamo 3 autovalori reali e distinti $\Rightarrow$ $M_e(H)$ è diagonalizzabile

Ragionando come per F si ottiene una base di autovettori data da $\{(1,-2,-1),(1,0,-1),(1,-4/5,\frac{3}{5})\}$

Ci basterà usare la stessa formula utilizzata per F

Es 5

Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

1) Calcolare gli autovalori e autospazi associati

→ molt. algebrica 2

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 7$

una base per gli autospazi è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = B$$

2) Calcolare l'inversa

Troviamo una base per gli autospazi B e ~~...~~ sappiamo che

$A = M_e(F)$

$M_{eB}(I_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $M_{Be}(I_3) = M_{eB}(I_3)^{-1}$

e $M_B(F) = M_{Be}(I_3)\, M_e(F)\, M_{eB}(I_3) = M_{eB}(I_3)^{-1} A\, M_{eB}(I$

$$\begin{array}{c} \| \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Diagonale con autovalori sulla diagonale

Chiamando $B = M_B(F)$ e $M = M_{eB}(I_3)$ abbiamo

$$B = M^{-1} A M \Rightarrow M B M^{-1} = A$$

$$\Rightarrow A^{-1} = (M B M^{-1})^{-1} = M B^{-1} M^{-1}$$

così troviamo A^{-1}

ES_7

Calcolare il pol caratteristico di

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

sol

La matrice D ha determinante nullo $\Rightarrow$ nucleo non banale
e ricordiamo che è autospazio relativo all'autovalore 0.
Cerchiamo di capire la molteplicità algebrica di 0:
Ricordando che molt alg $\geq$ molt geom.
E la molteplicità geometrica, ovvero la dimensione relativa all'autospazio dell'autovalore zero
si trova risolvendo:

$AV = \lambda V$ con $\lambda = 0 \Rightarrow AV = 0$ con $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^7$

$\Rightarrow$ si trova risolvendo il sistema omogeneo:

ma ora essendo le 7 equazioni dipendenti si avrà
che il sistema ha 6 gradi di libertà
$\Rightarrow$ la soluzione del sistema e quindi la
dimensione dell'autospazio sarà $= 6$

$\Rightarrow$ molt geo $= 6$

$\Rightarrow$ molt algebrica di zero ≥ 6.

Notiamo anche che il vettore $\underline{x} = (1,1,1,1,1,1,1)$
ha come immagine $(49,49,49,49,49,49,49)$

$\Rightarrow A\underline{x} = 49\underline{x} \Rightarrow 49$ è un autovalore

con molt algebrica ≥ 1

Dunque ci: $p(x) = x^6 (x-49)$

Es 7
soluzione ANNO 2014-2015 esonero 2 es 1.
Es 8
~~An~~ sol ANNO 2016-2017 Esonero 2 es 3