# TUTORATO 1

ES 1 PER INDICARE TRASPOSTA DI A SCRIVERÒ $A^t$, ANALOGO $^tA$

Siano A, B, C le seguenti matrici a coefficienti in $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolare se possibile

1) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 2) $B^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 3) $C^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4) $AC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

5) $CA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ +1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

6) $(BC)A = \left( \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

7) $B + (CA) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

8) $B(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

9) BA = NON SI PUÒ calcolare perchè il NUMERO DI colonne di B è diverso dal NUMERO di righe di A

10) $3A^t + BC = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

ES 2

Siano $C, I \in M_2(\mathbb{C})$ tali che $C = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcolare se possibile

1) $iC^2 + 3C + iI$ :

$$iC^2 = i \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 4i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -2 \\ -4 & i \end{pmatrix}$$

$$3C = \begin{pmatrix} 3i & 3 \\ 6 & 3i \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad iI = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow iC^2 + 3C + i = \begin{pmatrix} i & -2 \\ -4 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3i & 3 \\ 6 & 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4i & 1 \\ 2 & 4i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5i & 1 \\ 2 & 5i \end{pmatrix}$$

2) $3C^2 + 7C^3$

$$C^3 = C^2 C = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 4i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix} =$$

$\downarrow$ $c^2$ calcolare prima

$$= \begin{pmatrix} 5i & -1 \\ -2 & 5i \end{pmatrix}$$

$$3C^2 + 7C^3 = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 4i & 1 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 5i & -1 \\ -2 & 5i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6i \\ 12i & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35i & -3 \\ -14 & 35i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+35i & 6i-3 \\ 12i-14 & 35i+3 \end{pmatrix}$$

3) $$C^t C = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3i \\ 3i & 0 \end{pmatrix}$$

ES 3

Siano $A, B, C, X \in M_2(\mathbb{R})$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

Calcolare

1) $2A - B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

2) $3A + 2B - 4C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$

3) $-2A + B + 2C - 2B = -2A - B + 2C = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

Risolvere se possibile le seguenti equazioni nell'incognita $X \in M_2(\mathbb{R})$

1) $3X + 2(A - X) + B + 2(C + 2X) = 0$

$\Leftrightarrow 3X + 2A - 2X + B + 2C + 4X = 0$

$\Leftrightarrow 5X = -2A - B - 2C \Leftrightarrow$

$5X = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 5X = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5x_1 & 5x_2 \\ 5x_3 & 5x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ ~~5x~~ $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$

$\downarrow$

SONO UGUALI COMPONENTE PER COMPONENTE

ES 4

Det una matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, diversa dalla matrice nulla $O_2$, tale che $A^2 = O_2$

sol

Per esempio prendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

come lo trovo?

Sia $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ con $x_i$ non tutti nulli

$$A^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 x_3 & x_2 x_1 + x_2 x_4 \\ x_1 x_3 + x_4 x_3 & x_2 x_3 + x_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2 x_3 = 0 \\ x_2 x_1 + x_2 x_4 = 0 \\ x_1 x_3 + x_4 x_3 = 0 \\ x_2 x_3 + x_4^2 = 0 \end{cases}$$

se $x_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 x_3 = 0 \\ x_2 x_4 = 0 \\ x_1 x_3 + x_4 x_3 = 0 \\ x_2 x_3 + x_4^2 \end{cases}$

Abbiamo $x_2 x_3 = 0$ ed $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow x_2 = 0$ e/o $x_3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Pongo $x_3 = 0 \Rightarrow x_4 = 0$

dalla 4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ se pongo $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si ha $A^2 = O_2$

Es 5

Det una matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, diversa dalla matrice identità $1_2$, tale che $A^2 = A$

Sol

Per esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Es 6

Siano $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 7 & k^4-3k+1 & 2 \\ k^4+2k-3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} l^3+\frac{1}{2}l^2-\frac{1}{2}l & -2 & l^3+4l^2+l-8 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & l^3-5l^2+4l & 0 \end{pmatrix}$$

1) Si trovino il valore di $k$ i valori per cui $A$ è simmetrica:

$A$ è simmetrica $\Leftrightarrow A^t = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \ \forall i, j$

Nel nostro caso dobbiamo verificare che

$k^4 - 3k + 1 = k^4 + 2k - 3 \Leftrightarrow k = \frac{4}{5}$

2) Si trovino i valori di $l$ per cui $B$ è antisimm.

$A$ è antisimmetrica $\Leftrightarrow A^t = -A \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \ \forall i, j$

Per essere antisimmetrica voglio $a_{ii} = 0$ e $a_{ij} = -a_{ji}$

• $a_{ii} = 0 \Leftrightarrow l^3 + \frac{1}{2}l^2 - \frac{1}{2}l = 0 \Leftrightarrow l(l^2 + \frac{1}{2}l - \frac{1}{2})$

$\Leftrightarrow l = 0, \frac{1}{2}, -1$

• Vorrei avere $a_{ij} = a_{ji} \ \forall i, j$

$\Rightarrow$ voglio $a_{13} = a_{31}$ ma se sostituisco $l = 0, \frac{1}{2}, -1$ in $a_{13}$ e $a_{31}$ non vengono uguali

⇒ la matrice non è antisimmetrica

Es 8

Dim la seguente affermazione:

Se una matrice quadrata è nilpotente di ordine $n$ allora non è invertibile

sol

$m$ = il più piccolo intero per cui $A^m = 0$

Se A fosse invertibile $\exists A^{-1}$ ovvero

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Sappiamo $A^m = 0$ moltiplico per $A^{-1}$

$\Rightarrow A^m A^{-1} = 0 A^{-1} \Rightarrow A^{m-1} = 0$

⇒ la matrice non era NILPOTENTE DI ORDINE $m$

Es 9

Dim la seguente affer:

Se $A = (a_{ij})$ è una matrice diagonale, allora gli elementi $A^k$ sono potenze k-esime

sol

Lavoriamo per induzione su $k$

- $k = 1$ ovvio

- PASSO INDUTTIVO

Per ipotesi induttiva otteniamo $A^{k-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{k-1} & & & \\ & a_{22}^{k-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^{k-1} \end{pmatrix}$

Allora $A^k = A^{k-1} A = \begin{pmatrix} a_{11}^{k-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}^k)_{i,j}$

ES 7

Dim la seguente affermazione:
l'inversa di una matrice sim inv è una matrice sim.

sol

Devo dire che $(A^{-1})^t = A^{-1}$. Sia $I$ la matrice identità

$$I = I^t = (A\, A^{-1})^t \underset{(AB)^t = B^t A^t}{=} (A^{-1})^t\, A^t \underset{A \text{ è simmetrica}}{=} (A^{-1})^t A$$

Quindi abbiamo ottenuto
$(A^{-1})^t A = I$ e quindi $(A^{-1})^t$ è

l'inverso di $A$ che era quello che volevo.
$(A^{-1})^t = A^{-1}$

ES 10

Applicando l'algoritmo di Gauss-Jordan, si determinino tutte le soluzioni, se esistono, dei seguenti sistemi lineari

1) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$

Scrivo la matrice associata al sistema lineare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Applico l'algoritmo di Gauss-Jordan alla matrice $A \rightsquigarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad R_3 \to R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \quad R_2 \to R_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 + 2R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{pmatrix} = A'$$

Scrivo il sistema lineare associato ad $A'$

$$⊛⊛ \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2y + z = -1 \\ -z = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z = 9 \\ y = -5 \\ x = -1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Abbiamo una soluzione per il sistema ⊛⊛ che è $(-1, 5, 9)$ e quindi è una soluzione per ⊛

2)
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y + 6z = 1 \end{cases}$$

Scrivo la matrice associata al sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2 \to R_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - R_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_3 \to R_3 + R_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y+6z=1 \\ 6z=1 \end{cases}$$

$\exists$ ! lo sol$^{e}$ è $\left(-\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}\right)$