$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y+6z=1 \\ 6z=1 \end{cases}$$

$\exists$ la sol e $\left(-\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}\right)$

TUTORATO 2

ES 1

Si determino, se esistono, tutte le soluzioni dei seguenti sistemi lineari, utilizzando il metodo di Gauss-Jordan

1) $$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y+z=0 \\ x+y+2z=+3 \end{cases}$$

Scrivo la matrice associata

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & +3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & +2 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ scrivo il sistema associato

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3z=2 \\ 0=4 \quad \text{ASS} \end{cases}$$

Il sistema è incompatibile

2) $\begin{cases} 3x - y - z - 4t = 9 \\ 2x - 3z - t = 0 \\ 8x - 2y - 5z - 9t = 18 \end{cases}$

Il sistema ha infinite soluzioni del tipo $(-2t, 0, 0, t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$

3) $\begin{cases} 2x - 2y + z + 4t = 0 \\ x - y - 4z + 2t = 0 \\ -x + y + 3z - 2t = 0 \\ 3x - 3y + z + 6t = 0 \end{cases}$

Scrivo la matrice associata

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad R_2 \leftrightarrow R_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1$
$R_3 \to R_3 + R_1$
$R_4 \to R_4 - 3R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_2 \leftrightarrow R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 0 \end{pmatrix} \quad R_4 \to R_4 - \frac{11}{7} R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

~ scrivo il sistema associato

$$\begin{cases} x - y - 4t + 2t = 0 \\ -2y + 7z = 0 \\ -7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Le sol sono del tipo $(-2t, 0, 0, t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$

4)
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 + 2R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -y - z = -4 \\ z = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \\ z = 9 \end{cases} \Rightarrow \text{l'unica sol è } (-1, -5, 9)$$

5) Il sistema ammette infinite soluzioni del tipo

$\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{5}t - \frac{1}{2}z,\ -\frac{2}{5} - \frac{3}{5}t + \frac{3}{5}z,\ z,\ t\right)$ al variare di $z, t \in \mathbb{R}$

ES 6

Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sol: ANNO 2012-2013 PRIMO ESONERO ES 2

Es 2

Si discutono i seguenti sistemi lineari al variare di $k \in \mathbb{R}$

1) $\begin{cases} kx - y + z = 2 \\ x - ky + z = 3 - k^2 \\ x - y + kz = k + 1 \end{cases}$

Scrivo la matrice associata

$$\begin{pmatrix} k & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -k & 1 & 3-k^2 \\ 1 & -1 & k & k+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k & k+1 \\ 1 & -k & 1 & 3-k^2 \\ k & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - R_1$
$R_3 \to R_3 - kR_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k & k+1 \\ 0 & 1-k & 1-k & -k^2-k+2 \\ 0 & -1+k & 1-k^2 & 2-k^2-k \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k & k+1 \\ 0 & 1-k & 1-k & -k^2-k+2 \\ 0 & 0 & -k^2-k+2 & 2(2-k^2-k) \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{cases} x - y + ky = (k+1) \\ (1-k)y + (1-k)z = -k^2-k+2 \\ (-k^2-k+2)z = 2(2-k^2-k) \end{cases}$$

$-k^2-k+2=0 \iff k=1,-2$

Se $k \neq 1,-2$ posso dividere per $-k^2-k+2$

$$\begin{cases} x-y+kz=k+1 \\ (1-k)y+(1-k)z=-k^2-k+2 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+kz=k+1 \\ (1-k)y=-k^2-k+2 \\ z=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+kz=k+1 \\ y=\dfrac{-k^2+k}{-k+1}=k \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k-2k+k+1=1 \\ y=k \\ z=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ l'unica sol è $(1,k,2)$

Nel caso in cui $k=1,-2$ Analizziamo il sistema separatamente

- $k=1$

$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

le sol sono della forma

$$\begin{cases} x=2-s+t \\ y=t \\ z=s \end{cases}$$

$\Rightarrow$ le sol sono $(2-s+t,\ t,\ s)$ al variare di $t,s \in \mathbb{R}$

- $k=-2$

$$\begin{cases} x-y+2z=-1 \\ 3y+3z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1+t \\ y=-t \\ z=t \end{cases}$$

le sol sono della forma $(t-1,-t,t)$ $t \in \mathbb{R}$

2) La sol è della forma $\left(k - \frac{k^2}{2} + \frac{1}{2}, \frac{k^2 - k}{2}, \frac{k-1}{2}\right)$

3) ESISTONO INFINITE SOLUZIONI UNICHE PER $k \neq -2$ $\left(-2\frac{k+1}{k+2}, \frac{k}{k+2}, \frac{2k+1}{k+2}\right)$

se $k = -2$ il sistema è incompatibile

se $k = 1$ $\exists$ infinite sol del tipo $(-y - z + 1, y, z)$

4) se $k \neq -2, 0, 2$ il sistema ha sol del tipo $\left(\frac{1}{2+k}, \frac{2k+3}{k(2+k)}, \frac{1}{2+k}\right)$

se $k = 0, -2$ il sistema è incompatibile

se $k = 2$ ci sono infinite soluz del tipo $\left(\frac{1}{2} - t, \frac{1}{4} + \frac{3}{2}t, t\right)$

Es 4

Es 3
Risolvere il seguente sistema lineare usando il metodo dell'inversa

$$\begin{cases} x + y - \dfrac{z}{2} = 1 \\ 12y - z = 12 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$$

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 12 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice quadrata associata al sistema

e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$ il vettore dei termini noti

~~Per~~ Sia $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ possiamo riscrivere il nostro sistema lineare nel seguente modo

$$A\underline{x} = b$$

Se A è invertibile $\Rightarrow \exists\, A^{-1}$, allora moltiplicando entrambi i membri per A^{-1} otteniamo

$$A^{-1}A\underline{x} = A^{-1}b \Rightarrow \underline{x} = A^{-1}b$$

Quindi bisogna solo calcolare la matrice inversa di A e moltiplicarla per il vettore b ed otterremo la soluzione $\underline{x}$

Es 4

Si determini l'inversa delle seguenti matrici

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, Prendiamo la matrice A ed affianchiamo con la matrice A

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Cerchiamo con trasformazioni elementari di disporre la matrice identità sulla sinistra

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2 \to R_2 - 2R_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to -\frac{1}{2} R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice ottenuta sulla destra è A^{-1}

ovvero abbiamo che $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2) Se $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Si ottiene $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{19} & -\frac{2}{19} \\ \frac{2}{19} & \frac{3}{19} \end{pmatrix}$

Determinare $(AB)^{-1}$ senza calcolare AB

Sappiamo che $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Quindi avendo già calcolato B^{-1} e A^{-1} ci basta moltiplicare le due matrici se $k=2$ ci sono infinite soluzioni del tipo $\left(\frac{1}{2}-t, \frac{1}{4}+\frac{3}{2}t\right.$

Es 21

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{si ha} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 11 & -8 & -10 \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Es 5

Si scrivino le seguenti matrici come prodotto di matrici elementari

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Notiamo che la matrice A è invertibile e pertanto può essere scritta come prodotto di matrici elementari

Portiamo da ~~A~~

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2 \to R_2 - 2R_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Applichiamo la stessa operazione sulla matrice identità

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2 \to R_2 - 2R_1 \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{= I}$$

A questo punto possiamo scrivere

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{= I} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{= A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ora abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad R_1 \to R_1 + \frac{2}{3} R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + \frac{2}{3} R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Abbiam

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; R_2 \longrightarrow -\frac{1}{3} R_2 \; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Abbiamo ottenuto

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{= X} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= Y} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{= Z} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{= A}$$

Abbiamo quindi

$$I_2 = X\,Y\,Z\,A$$

moltiplico per $\cancel{Z}\; Z^{-1}\, Y^{-1}\, X^{-1}$

si ottiene $Z^{-1}\, Y^{-1}\, X^{-1}\, I_2 = A$

$Z = R_{21}(-2)$

$Y = R_{12}\left(\frac{2}{3}\right)$

$X = R_2\left(-\frac{1}{3}\right)$

$$\Rightarrow A = \left(R_{21}(-2)\right)^{-1} \left(R_{12}\left(\tfrac{2}{3}\right)\right)^{-1} \left(R_2\left(-\tfrac{1}{3}\right)\right)^{-1}$$

[illegible]

$$\Rightarrow A = R_{21}(2)\; R_{12}\left(\tfrac{3}{2}\right)\; R_2(3)$$

Es 7

Sia $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in M_n(k)$ una matrice diagonale

MOSTRARE la seguente affermazione:

A è invertibile $\iff a_i \neq 0 \ \forall i$ ed in tal caso

la sua inversa è $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^{-1} \end{pmatrix}$

Vediamo le due implicazioni

$\Leftarrow$) Se $a_i \neq 0$ $\forall i$ allora A^{-1} è ben definita

calcolo AA^{-1} e ottengo la matrice identità

$\Rightarrow \exists$ l'inversa $\Rightarrow A$ è invertibile

$\Rightarrow$)) Suppongo per ipotesi che la matrice A è invertibile $\Rightarrow \exists$ $B \in M(n, K)$ tale che $BA = I_n$

Con B della forma $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{1n} \\ b_{n1} & b_{nn} \end{pmatrix}$

Esplicitiamo allora il prodotto BA si ottiene

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + \dots + b_{1n}a_{n1}, & \dots, & b_{11}a_{1n} + \dots + b_{1n}a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \\ b_{n1}a_{11} + \dots + b_{nn}a_{n1}, & \dots & , b_{n1}a_{1n} + \dots + b_{nn}a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\underset{a_{ij}=0 \text{ se } i \neq j}{=} \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} & \dots & b_{1n}a_{nn} \\ b_{21}a_{11} & b_{22}a_{22} & b_{2n}a_{nn} \\ \vdots & & \\ b_{n1}a_{11} & \dots & b_{nn}a_{nn} \end{pmatrix} = I_n$$

Allora si deve avere $b_{ij}a_{jj} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

Da ciò si deduce che se $a_{jj} = 0 \Rightarrow$ la matrice A non sarebbe invertibile

In conclusione ho che $b_{jj}\, a_{jj} = 1 \quad \forall\, j = 1, \dots, n$
mentre il resto dei coefficienti della matrice BA è uguale a zero $\Rightarrow b_{jj} = (a_{jj})^{-1}$ e $b_{ij} = 0$ se $i \neq j$
ed era ciò che volevamo

Es 8

Sia $V = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Per le seguenti quali rendono $(V, \oplus, *)$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale

1) $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c,\, b+d)$

$\quad \tau * (a,b) = (\tau a,\, \tau b)$

Verifichiamo gli assiomi di spazio vettoriale

(SV1) $((a,b) \oplus (c,d)) \oplus (e,f) = (a,b) \oplus ((c,d) \oplus (e,f))$

$((a,b) \oplus (c,d)) \oplus (e,f) = (a+c,\, b+d) \oplus (e,f)$

$= (a+c+e,\, b+d+f) = (a,b) \oplus (c+e,\, d+f) =$

$= (a,b) \oplus ((c,d) \oplus (e,f))$

(SV2) ~~Se~~ considero l'elemento $(0,0)$ si ha

$(a,b) \oplus (0,0) = (a,b) = (0,0) \oplus (a,b)$

(SV3) $(a,b) \oplus (-a,-b) = (0,0)$

(SV4) $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c,\, b+d) = (c+a,\, d+b) =$

$= (c,d) \oplus (a,b)$

$t * ((a,b)+(c,d)) = t*(a,b) \oplus t*(c,d)$

SV5) $t*((a,b)+(c,d))$

$t*((a,b)\oplus(c,d)) = t*((a+c, b+d))$

$t*((a,b)\oplus(c,d)) = (t(a+c), b+d) = (ta+tc, b+d)$

$t*(a,b) \oplus t*(c,d) = (ta,b)\oplus(tc,d) = (ta+tc, b+d)$

SV6) $(t+t')*(a,b) = t*(a,b) + t'*(a,b)$

$(t+t')*(a,b) = ((t+t')a, b) = (ta+t'a, b) =$

$t*(a,b) \oplus t'*(a,b)$

SV7) $t\cdot t' * (a,b) = t*(t'*(a,b))$

$\| \qquad\qquad \|$

$(tt'a, b) \qquad (tt'a, b)$

SV8) $1*(a,b) = (a,b)$ $\Rightarrow (V, \oplus, *)$ è spazio vettoriale

2) $(a,b)\oplus(c,d) = (a+c, b-d)$

$t*(a,b) = (ta, tb)$

Vediamo che non verifica SV4

$(a,b)\oplus(c,d) = (a+c, b-d)$

$\neq$

$(c,d)\oplus(a,b) = (c+a, d-b)$

$\Rightarrow$ Non è uno spazio vettoriale

3) $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$

$\tau \circledast (a,b) = (\tau a, 0)$

Vediamo che non verifica <u>SV</u> 8

$1 \circledast (a,b) = (a,0) \neq (a,b)$ se $b \neq 0$ $\Rightarrow$ NO SPAZIO vettoriale

4) $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$

$\tau \circledast (a,b) = (2\tau a, 2\tau b)$

Vediamo che per esempio non verifica <u>SV</u> 8

$1 \circledast (a,b) = (2a, 2b) \neq (a,b)$