

TUTORATO

ES 1

Die quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali

1) $A = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$

$\bar{A}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ perché è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo

Infatti sono $(\alpha, \beta, \gamma) \in A \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0$
 $(\alpha', \beta', \gamma') \Rightarrow \alpha' + \beta' + \gamma' = 0$

Consideriamo $(\alpha, \beta, \gamma) + (\alpha', \beta', \gamma') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma') = x$

$\Rightarrow \alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 0 \Rightarrow x \in A$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è l'unico $(\alpha, \beta, \gamma) \in A$?

$\lambda(\alpha, \beta, \gamma) = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma) = x$

allora $\lambda\alpha + \lambda\beta + \lambda\gamma = \lambda(\alpha + \beta + \gamma) = 0$

$\Rightarrow x \in A$

$\Rightarrow A$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

2) $A = \{(x, y, z) : x + y + z = 1\}$

Non è uno spazio vettoriale infatti

$(1, 0, 0) \in A$ ma $2 \cdot (1, 0, 0) = (2, 0, 0) \notin A$

3) $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 0\}$

Abbiamo che $(a, b, c) \in A \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = -b^2$

$\Leftrightarrow a = b = 0$

$\Rightarrow A$ può essere riscritto nel seguente modo

$$A = \{(x, y, z) : x=0, y=0\} = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$$

$\Rightarrow$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

$$4) A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0) \in A$$

$$\text{ma } (1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0) \notin A$$

poiché non risolve $x^2 + y^2 = 1$

$$5) \{(x, y, z) : 3y - z = 0, x + 2z = 0\}$$

È un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ perché è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo

$$6) A = \{(x, y, z) : x=0\} \cup \{(x, y, z) : z=0\}$$

$$(0, 1, 1) \in A \text{ infatti appartiene ad } B$$

$$(1, 1, 0) \in A \text{ infatti appartiene a } C$$

$$\text{ma } (0, 1, 1) + (1, 1, 0) = (1, 2, 1) \notin A$$

poiché non appartiene né a B né a C

Es 2
Dici quali dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$
sono suoi sottospazi vettoriali

1) $A = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

Non è un sottospazio vettoriale in fatti

$(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0) \in A \Rightarrow \pi \in$

$(1, 0, 0) + (-1, 0, 0) = (0, 0, 0) \notin A$

2) $A = \{(x, y, z) : x - 7y + z = 1\}$

Non è un sottospazio vettoriale poiché $(0, 0, 0) \notin A$

3) $A = \{(t, t, t) : 0 \leq t \leq 1\}$

Non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ poiché

non è chiuso per la moltiplicazione per scalari

ovvero $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda(t, t, t) = (\lambda t, \lambda t, \lambda t) \notin A$

4) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 1)\} = A$

Non è un sottospazio vettoriale in quanto poiché

$(0, 0, 2)$ e $(0, 0, -1) \in A$ ma

la loro somma $(0, 0, 2) + (0, 0, -1) = (0, 0, 1) \notin A$

5) $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ dove $H_i := \{(x_1, x_2, x_3) : x_i = 0\} \quad \forall i = 1, 2, 3$

Non è un sottospazio vettoriale in quanto poiché

$(0, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$ si ha che $(0, 0, 1) + (1, 1, 0) = (1, 1, 1)$

6) $A = \{(x, y, z) : x + y - 5z = 0 \wedge 2(x + y) = 0\} = A$

$H_1 \cup H_2 \cup H_3$

È un sottospazio vettoriale in quanto

rappresenta lo spazio delle soluzioni
di un sistema lineare omogeneo

$$7) \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 0\} = A$$

$$A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = -z^2\} = \{(x, y, z) : x=0, y=0, z=0\}$$

↓
siamo in $\mathbb{R}^3$

$$= \{(0, 0, 0)\} \Rightarrow \text{è lo spazio vettoriale NULO}$$

Es 3

Sia S il sottoinsieme di $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali costituito da polinomi che hanno -3 come zero.

Sia T il sottoinsieme $\mathbb{R}[x]$ costituito dai polinomi di quarto grado

~~Prova~~ Verificare se S e T sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}[x]$ di

$$S = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ tale che } f(-3) = 0\}$$

• Siano $f(x), g(x) \in S$

Abbiamo che $f(x) + g(x) \in S \Leftrightarrow (f+g)(-3) = 0$

$$\text{Ma } (f+g)(-3) = f(-3) + g(-3) = 0$$

• Sia $c \in \mathbb{R}$ e $f(x) \in S$ $c \cdot f(x) \in S$ poichè

$$c \cdot f(-3) = c \cdot 0 = 0$$

$$T = \{ f \in \mathbb{R}[x] : f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \text{ e } a \neq 0 \}$$

no se permite $x^4 + 1$ e $-x^4$

si no se permite $(x^4 + 1) + (-x^4) = 1 \notin T$

Ex 4

S_1 con ordenado em $\mathbb{R}^4$ e sequencia de subespaços

$$S = \{ (x, y, z, w) : x+z=0, 3y-w=0 \}$$

$$T = \{ (x, y, z, w) : x+z=0, y+2w=0 \}$$

Det $S \cap T$ e $S+T$

sol

$$- S \cap T : \begin{cases} x+z=0 \\ 3y-w=0 \\ y+2w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ w=3y \\ y+2w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=0 \\ w=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S \cap T = \{ (x, 0, -x, 0) : x \in \mathbb{R} \}$$

$$- S+T \quad S = (x, y, -x, 3y)$$

$$T = (x', y', -x', \frac{y'}{2})$$

$$\Rightarrow S+T = (x+x', y+y', -x-x', 3y+\frac{y'}{2})$$

Es 5

Sia V uno spazio vettoriale e siano S e T due sottospazi

Dimostrare che:

$S \cup T$ è un sottospazio di $V \Leftrightarrow S \subseteq T$ o $T \subseteq S$

di

$\Leftarrow$ • Se $S \subseteq T \Rightarrow S \cup T = T$ che è un sottospazio vettoriale di V

• Se $T \subseteq S \Rightarrow S \cup T = S$ $\square$

$\Rightarrow$ Se p.a. $S \not\subseteq T$ e $T \not\subseteq S$

• Dato che $S \not\subseteq T \exists s \in S$ tale che $s \notin T$

• Dato che $T \not\subseteq S \exists t \in T$ tale che $t \notin S$

e per cui $s \in S$ e $t \in T$ s.t. $s, t \in S \cup T$

Ora Sappiamo che $S \cup T$ è un sottospazio
e sappiamo che $s, t \in S \cup T$

verifichiamo allora mostrando che $s+t \notin S \cup T$

• Per farlo vedere che $s+t \notin S$

se p.a. $s+t \in S$ dato che S è un sottospazio
di V abbiamo $s+t \in S$ e $s \in S \Rightarrow -s \in S$

$$\Rightarrow (s+t) - s = s+t-s = t \in S$$

Assurdo

• Analogamente $s+t \notin T$

e quindi otteniamo $s+t \notin S \cup T$ Assurdo

6) In R^4 , CONSIDERING 5 SEQUENT VECTORS

$$v_1 = (1, 2, 1, 2) \quad v_2 = (0, 0, 1, 1) \quad v_3 = (1, 1, 1, 1) \quad v_4 = (0, 0, 0, 1) \\ v_5 = (1, 2, 3, 4)$$

a) Dire se i vettori v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 sono linearmente indipendenti

$$\alpha(1, 2, 1, 2) + \beta(0, 0, 1, 1) + \gamma(1, 1, 1, 1) + \delta(0, 0, 0, 1) + \epsilon(1, 2, 3, 4) = (0, 0, 0, 0)$$

$$(\alpha, 2\alpha, \alpha, 2\alpha) + (0, 0, \beta, \beta) + (\gamma, \gamma, \gamma, \gamma) + (0, 0, 0, \delta) + (\epsilon, 2\epsilon, 3\epsilon, 4\epsilon) = (0, 0, 0, 0)$$

$$(\alpha + \gamma + \epsilon, 2\alpha + \gamma + 2\epsilon, \alpha + \beta + \gamma + 3\epsilon, 2\alpha + \beta + \gamma + \delta + 4\epsilon) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma + \epsilon = 0 \\ 2\alpha + \gamma + 2\epsilon = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma + 3\epsilon = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma + \delta + 4\epsilon = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -\gamma - \epsilon \Rightarrow \alpha = -\epsilon$$

$$\Rightarrow -2\gamma - 2\epsilon + \gamma + 2\epsilon = 0 \Rightarrow -\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

$$-\epsilon + \beta + 3\epsilon = 0 \Rightarrow \beta = -2\epsilon$$

$$\beta + \beta + \delta - 2\beta = 0 \Rightarrow \delta = 0 \quad \text{SEE L'UNO}$$

$$\alpha = -\epsilon \quad \beta = -2\epsilon \quad \gamma = 0 \quad \delta = 0 \quad \epsilon = \epsilon \quad \text{NON SONO LIN. INDIPENDENTI}$$

OPPURE POSSO DIRE CHE $v_5 = v_1 + v_2$

b) Dire se v_1, v_2, v_3, v_4 sono lin. indip.

$$\alpha(1, 2, 1, 2) + \beta(0, 0, 1, 1) + \gamma(1, 1, 1, 1) + \delta(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$(\alpha, 2\alpha, \alpha, 2\alpha) + (0, 0, \beta, \beta) + (\gamma, \gamma, \gamma, \gamma) + (0, 0, 0, \delta) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \delta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -\gamma \Rightarrow 2\gamma + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \delta = 0$$

SONO LIN. DIP.

c) Dire se v_1, v_2, v_4, v_5

$$(\alpha, 2\alpha, \alpha, 2\alpha) + (0, 0, \beta, \beta) + (0, 0, 0, \delta) + (\gamma, 2\gamma, 3\gamma, 4\gamma) = (0, 0, 0, 0)$$

$$(\alpha + \gamma, 2\alpha + 2\gamma, \alpha + \beta + 3\gamma, 2\alpha + \beta + \delta + 4\gamma) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 2\alpha + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \delta + 4\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -\gamma \Rightarrow -2\gamma + 2\gamma = 0$$

$$-\gamma + \beta + 3\gamma = 0 \Rightarrow \beta = -2\gamma$$

$$-2\gamma + 2\gamma + \delta + 4\gamma = 0$$

$$\Rightarrow \delta = -4\gamma$$

NON SONO LIN. INDIP.

$$v_5 = v_1 + 2v_2$$

d) Dire

se i vettori

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \delta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -\gamma$$

$$\alpha = -\gamma$$

E

TU

1) H

PO

3

d) Dire se i vettori u_1, u_2, u_3, u_4 generano $\mathbb{R}^4$
Vedo se sono linearmente dipendenti.

$$(x, 2x, x, 2x) + (0, 0, \beta, \beta) + (c, c, c, c) + (d, 2d, 3d, 4d) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} x + c + d = 0 \\ 2x + c + 2d = 0 \\ x + \beta + c + 3d = 0 \\ 2x + \beta + c + 4d = 0 \end{cases}$$

$$x = -c - d$$

$$-2c - 2d + 2d = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$-d + \beta + 3d = 0 \quad \beta = -2d$$

$$-2d - 2d + 4d = 0$$

$$d = t$$

$$x = -t \quad \beta = -2t \quad c = 0 \quad d = t \quad \text{Non sono linearmente dipendenti}$$

E quindi non generano $\mathbb{R}^4$

$$v_2 \neq \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4$$

ES 1

Mostrare che $\{1, x, x^2\}$ è un insieme di generatori per $(\mathbb{R}_{\leq 2}[x])$ (ossia lo spazio dei polinomi di grado al più 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$).

Determinare se l'insieme $\{x, x^2, 4x + 5\pi x^2\}$ è un insieme di generatori in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

sol

• Abbiamo che $\{1, x, x^2\}$ è un insieme di generatori poiché sia $p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ allora

$$p(x) = ax^2 + bx + c = \langle 1, x, x^2 \rangle_{\mathbb{R}}$$

↓
è proprio la definizione di sottospazio generato da $\{1, x, x^2\}$

• Non è un insieme di generatori poiché per esempio non esiste un combinato di

$\{x, x^2, 4x + 5\pi x^2\}$ tale che mi dia una costante

Es 8

Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

$$S_1 = \{ v_1 (1, 3, 2), v_2 (2, 1, -1), v_3 (1, 2, -2) \}$$

verifichiamo l'indipendenza lineare dei vettori
cerchiamo un sottospazio lineare
del tipo

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si deve avere $a=0, b=0$ e $c=0$

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ 3a + b + 2c = 0 \\ 2a - b - 2c = 0 \end{cases} \quad \text{Dobbiamo trovare } a, b, c$$

Però se notate analizzando il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{sistema} \\ \text{associato} \end{array} \quad \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ -5b - c = 0 \\ -c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{I vettori sono linearmente indipendenti}$$

Esercizio 3 vettori linearmente indipendenti
in $\mathbb{R}^3$ costituiscono una base

Però una combinazione di v_1, v_2, v_3
che dia come risultato $(2, 1, 1)$

$\hookrightarrow$

ovvero
che

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Considero il sistema

$$\begin{cases} a + 2b + c = 1 \\ 3a + b + 2c = 1 \\ 2a - b - 2c = 1 \end{cases}$$

e si ottiene l'unica

$$\text{soluzione } \left(\frac{2}{5}, \frac{7}{15}, -\frac{1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} v_1 + \frac{7}{15} v_2 - \frac{1}{3} v_3$$

(NOTA: È CORRETTO CHE CI SIA VENUTO

UN'UNICA SOLUZIONE POICHÉ OGNI VETTORE IN

$\mathbb{R}^3$ SI SCRIVE IN MODO UNICO COME

COMBINAZIONE LINEARE DI ELEMENTI DELLA BASE)

$$\bullet S_2 := \{ v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (2, 0, 1), v_3 = (2, 3, 0) \}$$

Proviamo a combinare linearmente i 3 vettori

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0 \Leftrightarrow a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 2c = 0 \\ a + 3c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 + 2R_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b + 2c = 0 \\ -2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2b - 2c \\ c = 2b \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Non sono linearmente
si ha $a=0, b=0, c=0$

$\Rightarrow$ i vettori sono ennumerati all'P

• Non sono quindi una base di $\mathbb{R}^3$

$$\text{e } (1, 1, 1) \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

$$\text{Infatti } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$

$$S_3 := \{ v_1 = (4, 2, 1), v_2 = (2, 1, 1), v_3 = (4, 0, 5), v_4 = (1, 1, 0) \}_P$$

Sono PIÙ di 3 vettori $\Rightarrow$ sono certamente d.l.p.

Vediamo se generano $\mathbb{R}^3$

Consideriamo un generico vettore $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
e proviamo a scriverlo come combinazione
LINEARE DEI vettori di S_3

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} 4a + 2b + 4c + d = x \\ 2a + b + d = y \\ a + b + 5c = z \end{cases}$$

Poiché questo sistema ha soluzioni $\forall$ valori di (x, y, z)

(che possiamo considerare come parametri indipendenti

del sistema) Abbiamo che ogni

vettore può essere scritto come combinazione lineare

dei nostri 4 vettori $\Rightarrow$ i vettori di S_3

sono un insieme di generatori

• abbiamo che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -v_1 + 2v_2 + v_4$

$$J_4 = \{ v_1 = (3, -5, 2), v_2 = (-1, 3, -1) \}$$

sono meno di 3 vettori $\Rightarrow$ non possono generare $\mathbb{R}^3$
 ma insieme solo linearmente, ma (P)
 perché non sono proporzionali

Es 9

In $M_2(\mathbb{R})$ si considerano le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si verifichi che l'insieme $K = \{A, B, C, D\}$
 è una base di $M_2(\mathbb{R})$ e si esprime
 la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ nella base K .

Sol

Possiamo interpretare le matrici 2×2 come vettori
 di $\mathbb{R}^4$ anzi si è

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow M \approx v_M = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Quindi per verificare l'indipendenza delle quattro matrici
 verifichiamo l'indipendenza dei vettori
 v_A, v_B, v_C, v_D .

Poi imponendo il sistema che ha per colonne le matrici
 della base portate a vettori e volendo con le
 matrice E portate a vettore si ottiene che la
 soluzione del sistema è la combinazione lineare che
 dà E . ovvero imponendo

$$a v_A + b v_B + c v_C + d v_D = v_E \quad \text{si ottiene} \quad \begin{cases} a = -\frac{11}{21} \\ b = -\frac{13}{21} \\ c = -\frac{2}{21} \\ d = \frac{13}{21} \end{cases}$$