TUTORATO 4

ES 1

1) $v_1 = (1,-1,2)$, $v_2 = (1,-2,1)$, $v_3 = (0,1,0)$

Verifichiamo l'indipendenza lineare dei vettori: cerchiamo una combinazione lineare del tipo

$a\, v_1 + b\, v_2 + c\, v_3 = 0$

ovvero
$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a-2b+c=0 \\ 2a+b=0 \end{cases}$$

Si ha che l'unica soluzione del sistema è $(0,0,0)$

$\Rightarrow$ L'unica COMBINAZIONE LINEARE di v_1, v_2, v_3 che dà il vettore nullo ha tutti i coefficienti nulli

$\Rightarrow$ i vettori sono LINEARMENTE INDIP.

ESSENDO 3 vettori indipendenti costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.

Scriviamo $(1,1,1)$ come COMBINAZIONE LINEARE DI v_1, v_2, v_3 ovvero cerchiamo a, b, c tali che

$$a\, v_1 + b\, v_2 + c\, v_3 = (1,1,1)$$

RISOLVENDO IL SISTEMA SI TROVA L'UNICA SOLUZIONE $(0,1,3)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2 + 3v_3$$

2) $v_1 = (0,5,5)$, $v_2 = (3,2,1)$, $v_3 = \left(\frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$

Sono LINEARMENTE DIPENDENTI e quindi essendo 3 vettori non generano $\mathbb{R}^3$

Si ha $v_3 = \frac{1}{5} v_1 + \frac{1}{2} v_2$, ma $(1,1,1) \notin \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

3) $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (-1,-2,-2)$, $v_3 = (1,2,1)$, $v_4 = (0,1,2)$

Sono più di 3 vettori $\Rightarrow$ sono LINEARMENTE DIP

Per verificare se generano $\mathbb{R}^3$, proviamo a scrivere un generico vettore $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ come combinazione LINEARE DI ESSI:

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 + d v_4 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ovvero
$$\begin{cases} a - b + c = x \\ -2b + 2c + 2d = y \\ a - 2b + c + 2d = z \end{cases}$$

Poiché questo ha soluzioni per qualsiasi valore di (x,y,z) (che considereremo parametri nella sol del sistema). Abbiamo che ogni vettore può essere scritto come combinazione lineare dei nostri 4 vettori di partenza che quindi sono generatori.

Si ha inoltre: $v_2 = -\frac{1}{2} v_1 - \frac{1}{2} v_3 - \frac{1}{2} v_4$

e $(1,1,1) = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_3$

4) $v_1 = (2,3,0)$ $v_2 = (0,1,-2)$

Sono meno di 3 vettori $\Rightarrow$ non possono generare $\mathbb{R}^3$, ma sono linearmente indip poiché non sono proporzionali.

Inoltre $(1,1,1) = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{4} v_2$

Es 2

Dati i seguenti vettori

$a=(1,3,2)$ $\quad b=(-2, k-6, k+4)$ $\quad c=(-1, k-3, k^2+k+1)$

$d=(0,-2,k-1)$

1) Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori $\{a,b,c\}$ sono linearmente indipendenti:

Consideriamo una qualsiasi combinazione lineare

$\alpha a+\beta b+\gamma c=0 \quad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$

ed otteniamo il seguente sistema

$$\begin{cases} \alpha -2\beta - \gamma =0 \\ 3\alpha +(k-6)\beta + \gamma(k-3)=0 \\ 2\alpha +(k+4)\beta + \gamma(k^2+k+1)=0 \end{cases}$$

La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & k-6 & k-3 \\ 2 & k+4 & k^2+k+1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2-3R_1 \\ R_3 \to R_3-2R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & k & k \\ 0 & k+8 & k^2+k+3 \end{pmatrix}$$

Se $k \neq 0$

$$R_3 \to R_3 - \frac{k+8}{k} R_2 \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -1 \\ 0 & \boxed{k} & k \\ 0 & 0 & \boxed{k^2-5} \end{pmatrix}$$

I vettori sono linearmente indip $\Leftrightarrow$ tutti i pivot sono non nulli $\Leftrightarrow$ $k \neq 0 \pm \sqrt{5}$

2) Posto $k=2$ determinare le componenti del vettore d rispetto alla base $\{a,b,c\}$

Per $k=2$ i vettori a, b, c sono LINEARMENTE INDIPENDENTI e perciò COSTITUISCONO una base di $\mathbb{R}^3$, troviamo quindi una COMBINAZIONE LINEARE DI QUESTI (UNICA!) CHE MI DA IL VETTORE $d = (0, -2, 1)$.
ovvero cerchiamo $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$x_1 a + x_2 b + x_3 c = d$$

Risolvendo il sistema si ottiene
$x_1 = 9$, $x_2 = 10$, $x_3 = -11$

ESERCIZIO 3

Trovare le dimensioni di $U, W, U+W, U \cap W$ e una base per ognuno di ESSI.

a) $U = \langle (1,0,2), (1,-1,2), (1,1,0) \rangle$

$W = \langle (1,1,1), (0,-1,1), (1,2,0) \rangle$

Per calcolare la dimensione di U e W dobbiamo calcolare il NUMERO MASSIMO DI vettori linearmente indipendenti i quali costituiranno poi una base

- $\dim(U) = 2$ poiché $(1,1,0) = 2\cdot(1,0,1) - (1,-1,2)$
- $\dim(W) = 2$ poiché $(1,2,0) = (1,1,1) - (0,-1,1)$.

- Una base di U sarà data perciò da
  $\{ \underset{u_1}{(1,0,1)}, \underset{u_2}{(1,-1,2)} \}$
- una base di W invece
  $\{ \underset{w_1}{(1,1,1)}, \underset{w_2}{(0,-1,1)} \}$

- Per calcolare la $\dim(U+V) = \dim \langle u_1, u_2, w_1, w_2 \rangle$ considerando la matrice che ha per colonne i vettori u_1, u_2, w_1, w_2 si verifica che ha rango 3 $\Rightarrow \dim \langle u_1, u_2, w_1, w_2 \rangle = 3$

$\Rightarrow \dim(U+W) = 3 \Rightarrow U+W = \mathbb{R}^3$ e possiamo scegliere per esempio la base canonica

- Per la formula di grassmann abbiamo che

$$\dim(U \cap W) = \underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{\dim(U)} + \underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{\dim(W)} - \underset{\substack{\shortparallel \\ 3}}{\dim(U+W)} = 1$$

Calcoliamo ora una base di $U \cap W$

$U = \langle u_1, u_2 \rangle$ e $W = \langle w_1, w_2 \rangle$

Sia $v \in U \cap W \Rightarrow v \in U$ e $v \in W$

$v = a u_1 + b u_2$ $v = c w_1 + d w_2$

Poiché deve appartenere all'intersezione vogliamo quindi che

$$v = a u_1 + b u_2 = c w_1 + d w_2 \quad \star$$

$\Rightarrow a(1,0,1) + b(1,-1,2) = c(1,1,1) + d(0,-1,1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b-c=0 \\ -b-c+d=0 \\ a+2b+c-d=0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono $\begin{cases} a=k \\ b=-k \\ c=0 \\ d=-k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$

Sostituisco in $\star$ e ottengo

$v = k u_1 - k u_2 = -k w_2 \Rightarrow v \in \langle w_2 \rangle$

$\Rightarrow U \cap W = \langle (0,1,-1) \rangle$

b) $U = \langle \overset{u_1}{(0,1,1)}, \overset{u_2}{(0,0,-1)}, \overset{u_3}{(1,1,-1)} \rangle$

$W = \langle \underset{w_1}{(3,0,3)}, \underset{w_2}{(1,-1,1)}, \underset{w_3}{(0,3,0)} \rangle$

- Si verifica che i vettori che generano U sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$ sono una base per U e quindi $\dim U = 3$ - $(U = \mathbb{R}^3)$

- Ma $(3,0,3) = 3 \cdot (1,-1,1) + (0,3,0)$

  $\Rightarrow W = \langle (1,-1,1), (0,3,0) \rangle \Rightarrow \dim W = 2$

- Ora ricordiamo che $U + W = \langle u_1, u_2, u_3, w_1, w_2 \rangle$

  poiché i vettori di U costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$

  si ha che $U + W = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = U = \mathbb{R}^3$

- $U \cap W = \mathbb{R}^3 \cap W = W$

c) $U = \langle (1,1,0,1), (1,0,1,1), (0,1,-1,0) \rangle$

$W = \langle (2,-3,0,0), (0,0,1,-1), (1,1,1,1) \rangle$

- $U = \langle (1,1,0,1), (1,0,1,1) \rangle$

  poiché $(0,1,-1,0) = (1,1,0,1) - (1,0,1,1)$

  $\Rightarrow \dim U = 3$

- Si verifica che i vettori di W sono LINEARMENTE INDIPENDENTI

  $\Rightarrow \dim W = 3$

- $U + W = \mathbb{R}^4$

- Svolgendo i calcoli come nel punto (a)

  si ottiene $U \cap W = \langle (7,4,3,7) \rangle$

d) $U = \langle \overset{u_1}{(1,1,0,0)}, \overset{u_2}{(0,0,1,1)}, \overset{u_3}{(3,3,-2,-2)} \rangle$

$W = \langle \underset{w_1}{(2,4,2,3)}, \underset{w_2}{(1,2,1,2)}, \underset{w_3}{(1,2,1,1)} \rangle$

- $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ poiché $u_3 = 3u_1 - 2u_2$
- $W = \langle w_2, w_3 \rangle$ poiché $w_1 = w_2 + w_3$
- $U + W = \langle u_1, u_2, w_2, w_3 \rangle = \mathbb{R}^4$

poiché i 4 vettori sono LINEARMENTE INDIPENDENTI

- Ora $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W) = 0$

$\Rightarrow U \cap W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow U \oplus W = \mathbb{R}^4$

ESERCIZIO

Siano $U = \langle (1, 0, \sqrt{5}, 0), (\sqrt{5}, 0, -1, 0) \rangle$

$W = \langle (0,2,0,3), (0,1,0,1) \rangle$

MOSTRARE che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$

sol

- Dobbiamo mostrare che $U + W = \mathbb{R}^4$

ovvero che $\dim(U+W) = 4$

e che $U \cap W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\dim(U) = 2$ poiché i vettori che lo generano non sono proporzionali
- ANALOGAMENTE $\dim(W) = 2$
- Si verifica facilmente che i generatori di U e W sono indip

$\Rightarrow U + W = \mathbb{R}^4$

- Per la formula di grassman abbiamo che $\dim(U \cap W) = 0$

ES 5

In $\mathbb{R}^5$ si considerino i seguenti insiemi

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : 2x_1 + x_2 = x_3 = 0\}$$

1) Si verifichi che W_1 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$. Se ne determini una base e la dimensione

È un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ in quanto è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = 0 \\ x_4 = s \\ x_5 = z \end{cases} \circledast \qquad s, t, z \in \mathbb{R}$$

Sia $v \in \mathbb{R}^5$ una soluzione di $\circledast$ $\Rightarrow \exists$ t, s, z tali che

$$v = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ 0 \\ s \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = B$$

$\Rightarrow B$ è una base di W_1 e quindi $\dim W_1 = 3$

2) Sia $W_2 = \langle a, b, c, d \rangle$ dove

$a = (0, 3, 1, -2)$, $b = (0, 0, 2, 1, 1)$, $c = (0, 6, -10, -10, -6)$

$d = (0, 3, 7, 1, 3)$

Se ne determini una base e la dimensione

Impostando il sistema lineare omogeneo

$x_1 a + x_2 b + x_3 c + x_4 d = 0$ ⊛

si ottiene

$$\begin{cases} x_1 = -2v - t \\ x_2 = 6v - 3t \\ x_3 = v \\ x_4 = t \end{cases}$$

ovvero le incognite corrispondenti ai vettori c e d sono parametri liberi e perciò i vettori c, d sono dipendenti da a, b. ovvero possiamo scriverli come combinazione dei vettori a, b. esplicitamente

Scegliendo $(t, v) = (0, 1), (1, 0)$ si ottiene da ⊛

- Per $t = 0$ e $v = 1$ si ottiene c come combinazione di a e b
- Per $t = 1$, $v = 0$ si ottiene d come combinazione di a, b

$\Rightarrow W_2 = \langle a, b \rangle \Rightarrow \dim W_2 = 2$

3) DIMOSTRARE CHE $\mathbb{R}^5 = W_1 \oplus W_5$

Ci basta verificare che i vettori della base di W_1 e quelli della base di W_2 sono indip

PER GRASSMANN si ha che $W_1 \cap W_2 = \vec{0} \Rightarrow$ TESI

4) Si determini un sottospazio W_3 di $\mathbb{R}^5$ tale che $\dim(W_1 \cap W_3) = 1$ e $\dim(W_3) = 3$

- Dobbiamo scegliere W_3 tale che

$W_3 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ indipendenti e tali

$\exists!\ v_i$ tale che $v_i \in W_1$

Scegliamo

$$W_3 = \langle (0,3,1,-2,0), (0,0,0,1,0), (0,0,2,1,1) \rangle$$

ES 6

Siano U, V due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2

1) DIMOSTRARE che $U \cap V \neq 0$

2) DETERMINARE tutte le possibili intersezioni e descrivere un esempio per ognuna di esse

dim

1) Se p.a. $U \cap V = \{0\} \Rightarrow \dim(U \cap V) = 0$

Allora per la FORMULA DI GRASSMANN si ha che $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) = 2+2 = 4$

Ora $U+V$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$, perciò avrei che un sottospazio ha dimensione maggiore dello spazio ASSURDO

2) Possiamo dunque avere $\dim(U \cap V) = 1, 2$

- Se $\dim(U \cap V) = 1$ allora da GRASSMANN deduciamo $\dim(U+V) = 3$
  Scegliamo $U = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$ e $V = \langle (0,0,1), (0,1,0) \rangle$

- Se $\dim(U \cap V) = 2 \Rightarrow \dim(U+V) = 2$

  Perciò basta prendere $U = V$.

Es 7

Determinare due sottospazi U e V di $\mathbb{R}^4$ tali che $\mathbb{R}^4 = U+V$ senza che la loro somma sia DIRETTA.

sol

Possiamo costruire U e V nel seguente modo:
vogliamo che $\dim(U+V)=4$ e $\dim(U\cap W) \neq 0$

scelgo

$U = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ e_i primi 3-vettori della base canonica

$W = \langle e_1, e_4 \rangle$

Es 8

DIMOSTRARE O TROVARE UN CONTROESEMPIO PER LA SEGUENTE AFFERMAZIONE

Se V è uno spazio vettoriale e $v_1, v_2, v_3 \in V$ sono tali che

1) $v_1 \neq 0$
2) $v_2 \notin \langle v_1 \rangle$ (ovvero $\nexists\, a \in \mathbb{R}$ tale che $v_2 = a v_1$)
3) $v_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$ (ovvero $\nexists\, a, b \in \mathbb{R}$ tale che $v_3 = a v_1 + b v_2$)

Allora v_1, v_2, v_3 sono indip.

dim
L'asserto è vero.
Supponiamo p.a. che $\exists\ a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che
$a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0$ ⊛

e almeno uno di essi è diverso da zero

1) Se $c \neq 0 \underset{\text{da } ⊛}{\Rightarrow} v_3 = -\frac{a}{c} v_1 - \frac{b}{c} v_2$ ~~etta~~ $\Rightarrow v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle$
ASSURDO PER (3)

2) Se $c = 0$ ma $b \neq 0 \overset{⊛}{\Rightarrow} a v_1 + b v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -\frac{a}{b} v_1$

$\Rightarrow v_2 \in \langle v_1 \rangle$ CHE CONTRADDICE (2)

- Se $c=0$ e $b=0$ $\Rightarrow$ $a\neq 0$
$\Rightarrow$ per ⊛ $a v_1 = 0$ $\Rightarrow$ $v_1 = 0$ ASSURDO PER 1

□

ES 9

- Determinare le coordinate del vettore $c=(2,1)$ rispetto alla base $B_1=\{u_1,u_2\}$ dove $u_1=(3,2)$ e $u_2=(2,3)$

IN GENERALE: sia V uno spazio vettoriale e $\{v_1,\dots v_m\}$ una sua base allora $\forall v \in V$ $\exists!$ $(a_1,\dots,a_m) \in \mathbb{R}^m$ tale che $v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$

L'ennupla $(a_1,\dots,a_m)$ si chiama coordinate di v nella base $\{v_1,\dots,v_m\}$.

TORNIAMO ALL'ESERCIZIO, dobbiamo trovare due ELEMENTI $a,b \in \mathbb{R}$ tali che

$$a v_1 + b v_2 = c \iff a\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}3a+2b=2\\2a+3b=1\end{cases} \iff \begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\2 & 3 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\0 & 5/3 & -1/3\end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema si ottiene $a=4/5$ e $b=-\frac{1}{5}$

$\Rightarrow$ $c = 4/5\, v_1 - \frac{1}{5} v_2$ $\Rightarrow$ le coordinate di c sono $(4/5, -1/5)$

- Determinare le coordinate del polinomio $p(x)=2+x$ nello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ dei polinomi a coefficienti reali e grado al più 1 rispetto alla base $B_2=\{q_1(x), q_2(x)\}$

dove $q_1(x) = 3+2x$

$q_2(x) = 2+3x$

Possiamo usare la base $(e_1(x), e_2(x))$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ dove $e_1(x) = 1$ e $e_2(x) = x$ per trasferire il problema in $\mathbb{R}^2$

- $p(x) = 2 + x = 2e_1(x) + e_2(x)$ corrisponde al vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $q_1(x) = 3 + 2x = 3e_1(x) + 2e_2(x)$ corrisponde al vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $q_2(x) = 2 + 3x = 2e_1(x) + 3e_2(x)$ corrisponde al vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ dobbiamo trovare tali che

$$a \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi siamo tornati nel problema (1) ed avevamo la coppia $(4/5, -1/5)$
(NOTA $(4/5, -1/5)$ non corrisponde a $4/5 - \frac{1}{5}x$).

Quindi abbiamo trovato

$$p(x) = 4/5\, q_1(x) - \frac{1}{5}\, q_2(x)$$