TUTORATO 5

ES 1

Sia W_1 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $a=(1,1,-1)$ e $b=(2,-1,1)$

Sia W_2 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $c=(1,2,-2)$ e $d=(-1,-1,2)$.

Si determini $W_1 \cap W_2$ e una sua base

sol

- I vettori a, b sono indipendenti perché non sono proporzionali e $W_1 = \langle a, b\rangle \Rightarrow \dim W_1 = 2$
- Analogamente $\dim W_2 = 2$
- Vogliamo calcolare $W_1 \cap W_2$

Sia $v \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow v \in W_1$ e $v \in W_2$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$v = x_1 a + x_2 b \qquad v = x_3 c + x_4 d$$

$$\Rightarrow v = x_1 a + x_2 b = x_3 c + x_4 d$$

Ora $x_1 a + x_2 b = x_3 c + x_4 d \Leftrightarrow x_1 a + x_2 b - x_3 c - x_4 d = 0$ ⊛

Dobbiamo trovare x_1, x_2, x_3, x_4

Scrivo la matrice associata al sistema ⊛

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad R_3 \to R_3 + R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_2 - x_3 = 0 \\ -x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{3} x_3 \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5}{3} t \\ x_2 = -\frac{1}{3} t \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow v = \frac{5}{3} t\, a - \frac{1}{3} t = t\, c_3$$

$$\Rightarrow v \in \langle c \rangle \Rightarrow W_1 \cap W_2 = \langle c \rangle$$

e $\dim W_1 \cap W_2 = 1$

ES 2
Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i seguenti sottospazi vettoriali

$$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+2y = 2t = 0\}$$

$$K = \langle (1,2,0,1), (2,4,-1,1), (0,0,1,1), (1,2,4,5), (1,-1,0,5) \rangle$$

• H : sia $v \in H \Rightarrow v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tale che

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ 2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y \\ y=\alpha \\ \cancel{z}=\beta \\ t=0 \end{cases} \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v \in \langle \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_2} \rangle$$

$\exists\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow H = \langle x_1, x_2 \rangle \Rightarrow \dim H = 2$

• K : notiamo che $(2,4,-1,1) = 2(1,2,0,1) - (0,0,1,1)$
$(1,2,4,5) = (1,2,0,1) + 4(0,0,1,1)$

$$\Rightarrow K = \langle \underbrace{(1,2,0,1)}_{x_3}, \underbrace{(0,0,1,1)}_{x_4}, \underbrace{(1,-1,0,5)}_{x_5} \rangle$$

Dobbiamo verificare che i vettori x_3, x_4, x_5 sono indip

sia (⊛) $a x_3 + b x_4 + c x_5 = 0 \longrightarrow$ SCRIVO LA MATRICE ASSOCIATA AL SISTEMA ⊛

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DOPO OPERAZIONI ELEMENTARI

$\Rightarrow$ l'unica sol di ⊛ è $a=b=c=0 \Rightarrow$ sono indip.

H + K :

$$H+K = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rangle$$

Avremo che la dimensione di $H+K$ è il numero max di vettori LIN INDIPENDENTI ovvero il rango della matrice che ho per colonna i vettori x_i.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_3 & x_5 & x_4 & x_2 & x_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_4 \to R_4 + \frac{4}{3}R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{20}{3} \end{pmatrix} \quad R_4 \to R_4 - R_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{20}{3} \end{pmatrix}$$

Da questo vediamo che $R(A) = 4$
$\Downarrow$ 4 PIVOT

ed inoltre che i vettori x_3, x_5, x_4, x_2 sono linearmente INDIPENDENTI $\Rightarrow \dim H+K = 4$

e $H+K = \langle x_3, x_4, x_5, x_2 \rangle$

- $H \cap K$: Per Grassmann $\dim(H \cap K) = 1$

ed utilizzando il metodo dell'es 1

si ottiene $H \cap K = \left\langle \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 26 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Es 3

Calcolare il rango delle seguenti matrici

Ricordiamo $r(A)$ è massimo di righe o colonne linearmente indip

a) $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$ $\Rightarrow r(A) = \dim \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$

Applichiamo Gauss-Jordan

$R_2 \to R_2 - 3R_1$
$R_3 \to R_3 - 7R_1$
$R_4 \to R_4 - 2R_1$
$R_5 \to R_5 - R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & 11 & 22 \\ 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - \frac{11}{6} R_2$
$R_4 \to R_4 - \frac{8}{6} R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sim$ Dopo eliminou

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim \langle x_1, x_2, x_3 \rangle = 3$

$\Rightarrow r(A) = 3$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad R_3 \to R_3 - R_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \; ⊛ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad r(C) = \#\text{ PIVOT NON NULLI} = 2$$

NOTA: il rango di una matrice è il NUMERO DI RIGHE O COLONNE LINEARMENTE INDIP.

Se avessimo preso una combinazione lineare

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0$$

La riduzione ⊛ della matrice associata al sistema LINEARE ci dice che la colonna in cui appare il PIVOT NULLO, il reale associato b è un parametro LIBERO e che quindi il vettore v_2 è COMBINAZIONE lineare delle ALTRE COLONNE E QUINDI DIPENDENTE DA ESSE.

Infatti in questo caso AVREMMO POTUTO dire banalmente $v_2 = -v_1$

$$\Rightarrow r(C) = \dim \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = 2$$

ES 4

DIRE QUALI TRA I SEGUENTI VETTORI è UNA BASE DI $\mathbb{R}^4$
COMPLETARE AD UNA BASE IN CASO NEGATIVO

1) $B_1 = \{(1,0,8,9), (2,3,4,0), (1,7,5,9)\}$

VEDIAMO SE SONO LIN INDIP

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 8 & 4 & 5 \\ 9 & 0 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & -14 & -3 \\ 0 & -18 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{89}{3} \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 89 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{SONO LIN INDIP}$$

PER COMPLETARE AD UNA BASE DI $\mathbb{R}^4$ MI BASTA AGGIUNGERE UN VETTORE DELLA BASE CANONICA CHE MI PERMETTE DI AVERE IL PIVOT MANCANTE DOPO L'ELIMINAZIONE DI G.J.

In questo caso prendo $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e ottengo

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 8 & 4 & 5 & 0 \\ 9 & 0 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 89 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4$

ed i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente indip
$\Rightarrow$ sono 4 vettori e quindi una base di $\mathbb{R}^4$

2) $B_2 = \{ (1,0,0,1), (2,3,3,2), (0,-1,-1,0) \}$

Procediamo come nel caso 1

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; R_3 \to R_3 - R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{i vettori } v_1, v_2, v_3 \text{ sono linearmente dip}$$

In particolare poiché il 3 pivot è NULLO il vettore v_3 è combinazione lineare di v_1 e v_2

$$v_3 = \frac{2}{3} v_1 - \frac{1}{3} v_2 \quad \Rightarrow \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

Dobbiamo aggiungere 2 vettori della base canonica ~~ma~~ per ottenere i pivot mancanti

Scegliamo $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad B_2 = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ sono una base di $\mathbb{R}^4$

3) $B_3 = \{ (h,0,1,0), (1,3,2,0), (2,0,h,0), (1,3h,2h,0) \} \quad h \in \mathbb{R}$

Sono dip

- Per $h \neq 1$ possiamo completare così

$\{ (h,0,1,0), (1,3,2,0), (2,0,h,0), (0,0,0,1) \}$

- Per $h = 1$ possiamo scegliere:

$\{ (1,0,1,0), (2,3,2,0), (2,0,2,0), (0,0,0,1) \}$

ES 5 Siano A e B due matrici quadrate di ordine n a coefficienti in $\mathbb{R}$.
Si stabilisca quali delle seguenti affermazioni sono vere:

1) $r(A+B) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ (ERRORE NEL TESTO)

FALSO:

Prendiamo per esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A+B = I_2$

Ora $r(A) = r(B) = 1 < r(A+B) = 2$

2) $r(A) = r = r(B) \Rightarrow r(AB) = r$

FALSO:

Consideriamo A e B come sopra $\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow r(AB) = 0 \neq 1$

3) $r(A) < n \wedge r(B) < n \Rightarrow r(AB) < n$

Vero: Sappiamo in generale che $r(AB) \leq \underbrace{\min(r(A), r(B))}_{<n}$

$\Rightarrow r(AB) < n$

ES 6

Sia $A \in M_5(\mathbb{R})$ tale che $r(A^2) = 2$. Determinare il valore minimo e MASSIMO che può assumere il rango di A.

Sol

$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

$\Rightarrow \quad 2 = r(A^2) \leq \min\{r(A), r(A)\} = r(A) \leq 5$

$\Rightarrow 2 \leq r(A) \leq 5$

Ora diciamo che $2 \leq r(A) < 5$

ovvero non può valere che $r(A) = 5$

se p.a. $r(A) = 5 \Rightarrow A$ è invertibile $\Rightarrow A^2$ è invertibile

$\Rightarrow r(A^2) = 5$ ASSURDO

ES 7

UTILIZZANDO IL METODO DI K-R-C SI DETERMININO LE SOL DEI SEGUENTI SISTEMI LINEARI AL VARIARE DI $a \in \mathbb{R}$

1) $\begin{cases} x + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + z = 3 \end{cases}$

Abbiamo che il sistema è COMPATIBILE $\Leftrightarrow r(A) = r(A|b)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Abbiamo 1 e 3 colonne uguali $\Rightarrow r(A) = 2$

Però $r(A|b) = 3 \Rightarrow$ il sistema NON È COMPATIBILE

2) $\begin{cases} 2a\,x + ay + z = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + ay + z = 0 \\ ax + y + az = 1 \\ 3x + ay - az = 2 \end{cases}$

se $a \neq -1 \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow$ il sistema ammette un'unica soluzione

della forma

$$\frac{(a^2 + a, -2a - 3, a)}{a^3 - 2a - 3}$$

Se $a = 1$ il sistema è incompatibile in quanto la matrice orlata ha rango 3

3) $\begin{cases} ay + az = a \\ ax + y + az = 2 \\ ax - ay - az = a \end{cases}$

- Se $a \neq 0$ e $a \neq 1$ il sistema ha un'unica soluzione della forma $\left(2, \frac{3a-2}{a-1}, \frac{-2a+1}{a-1}\right)$
- se $a = 0$ il sistema ammette ∞^2 sol della forma $(t, 2, s)$ $t, s \in \mathbb{R}$
- se $a = 1$ il sistema è incompatibile

ES 8

Si consideri il sottospazio S delle matrici simmetriche nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$

1) Descrivere una base B di S

Sia $A \in S \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A \in \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\Rightarrow$ una base B è data da

$$B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{S_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{S_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S_3} \right\}$$

2) Calcolare le coordinate dei seguenti vettori nella base B

a) $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ allora $E_{1,1} = 1\, S_1 + 0 \cdot S_2 + 0\, S_3$

$\Rightarrow$ le coordinate di $E_{1,1}$ sono $(1,0,0)$

b) $E_{1,2} + E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{1,2} + E_{2,1} = 0\, S_1 + 1\, S_2 + 0\, S_3$

$\Rightarrow$ COORDINATE $(0,1,0)$

c) $E_{2,2} \Rightarrow$ COORDINATE $(0,0,1)$

3) LE COORDINATE DI $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$

$A = a\, S_1 + b\, S_2 + d\, S_3 \Rightarrow$ COORDINATE (a,b,d)