Tutorato 6

Esercizio 1

Calcolare il determinante delle seguenti matrici (al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ quando presente).

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1/2 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = 1 - (-3) = 4$

2) $B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(B) = 6 - 40 = -34$

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$$\det C = 1 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= (-18 + 24) - 2(-9 + 21) + 3(-8 + 14) = 6 - 24 + 18 = 0$$

Notiamo che si poteva dire subito che $\det C = 0$ in quanto C non ha rango max:
Infatti la prima e seconda riga sono una multiplo dell'altra. e il rango di una matrice è non nullo se e solo se ha rango max.

$$\cdot \det D = \begin{pmatrix} 6 & k & 1 \\ 1 & 2 & k-1 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det D = 6 \begin{vmatrix} 2 & k-1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} 1 & k-1 \\ k & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 4 - k(2-k^2+k) + (-2k) =$$

$$= k^3 - k^2 + 4k + 24$$

$\cdot A^t$ $\det(A^t) = \det(A) = 4$

$\cdot \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 4 \cdot (-34) = -136$

Esercizio 2

Calcolare utilizzando la matrice dei cofattori l'inversa delle seguenti matrici

Ricordiamo $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} (\mathrm{cof}(A))^t$

1) $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = -\dfrac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

2) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 6 & -1/2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad B^{-1} = \dfrac{2}{205} \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 11 & -\frac{1}{2} \\ -28 & 7 & 14 \\ \frac{25}{2} & -6 & 5 \end{pmatrix}$

3) $C = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 0 \\ -1 & 0 & k-2 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad k \in \mathbb{R}$

$\det C = (k-1)(2+k^2-k) \Rightarrow C$ è invertibile $\Leftrightarrow k \neq 1$

e in questo caso $C^{-1} = \dfrac{1}{(k-1)(2+k^2-k)} \begin{pmatrix} 0 & 2-2k & k^2-2k+1 \\ k^2-k+2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2-k & k-2 \end{pmatrix}$

Es 3

verificare con un esempio che $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

dim

Esempio : $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right)$

Es 4

Sia $A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A^T A = A^t A = I_n$

In tal caso A è una matrice ortogonale $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$

Sia $M \in O_n(\mathbb{R})$ (gruppo delle matrici ortogonali $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$)

1) Si dimostri che $\det(M) = \pm 1$

$$1 = \det(I_n) = \det(M^T \cdot M) = \det(M^t)\det(M) = (\det(M))^2$$

$\downarrow$

se $M \in O_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow M^T = M^{-1}$

Da cui segue l'asserto

$O_n(\mathbb{R})$ non è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$ poiché non contiene la matrice nulla

Es 5

Si calcoli determinante e rango delle seguenti matrici:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (9-10) - 2(3-4) = 1$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(B) = 0$ poiché ho tutte righe uguali (me bastano due affinché $\det(B) = 0$)

Inoltre sappiamo che il rango è il numero di righe linearmente indip.

Poiché le righe sono tutte linearmente dip

$\Rightarrow r(B) = 1$

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\det C = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 2(1-2) = 2$

$\Rightarrow r(C) = 3$

4) $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(D) = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 4 - 7 = -3 \Rightarrow r(D) = 3$

5) $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(E) = 2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + (1-2) = 0$

$\Rightarrow r(E) < 3$.

Infatti notiamo che le prime due colonne sono lin. indip. $\Rightarrow r(E) \geq 2$

$\Rightarrow r(E) = 2$

Es 6

Determinare se le matrici dell'esercizio precedente sono invertibili e in tal caso calcolarne l'inversa

sol

Son invertibili le matrici M tali che $\det(M) \neq 0$

$\Rightarrow$ Sono invertibili le matrici A, C, D

- $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- $B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
- $D^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -4 & 7 & -5 \end{pmatrix}$

Es 8

Stabilire al variare del parametro reale a, quando le seguenti matrici sono invertibili.

Se invertibili, trovare l'inversa, altrimenti calcolare il rango

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \det(A) = 2a^2-4$

$\Rightarrow$ Se $a \neq \pm\sqrt{2} \Rightarrow A$ è invertibile

e la sua inversa è $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{a^2-2} & \frac{-a+1}{2a^2-4} & \frac{3a-1}{2a^2-4} \\ \frac{a}{a^2-2} & \frac{-a+2}{2a^2-4} & \frac{a-6}{2a^2-4} \end{pmatrix}$

Se invece $a = \pm\sqrt{2} \Rightarrow r(A) = 2$ e A NON INVERTIBILE

2) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ a & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

$\det(B) = 2a^2-3$

Se $a \neq \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow B$ è invertibile e la sua inversa

$$\frac{1}{2a^2-3}\begin{pmatrix} a^2-1 & a & -a^2 \\ -a^2+2 & a & a^2-3 \\ -a & -3 & 3a \end{pmatrix}$$

Se invece $a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ si ha ~~rango~~ $r(B) = 2$

$\Rightarrow B$ non è invertibile

3) $C = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & a & a \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

$\det(C) = a(a-2)(a+1)$

Se $a \neq 0, 2, -1$ allora C è invertibile e la sua inversa

$$\begin{pmatrix} \frac{a-1}{a^2-a-2} & -\frac{1}{a^2+a} & -\frac{1}{-a^2-a-2} \\ \frac{2}{a^2-a-2} & \frac{a+2}{a^2+a} & -\frac{a}{a^2-a-2} \\ -\frac{a}{a^2-a-2} & -\frac{1}{a^2+a} & \frac{a}{a^2-a-2} \end{pmatrix}$$

Se $a = 0, 2, -1$ $r(C) = 2 \Rightarrow C$ non è invertibile

Es 9

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 e sia $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una sua base.

Determinare la dimensione e una base del sottospazio W di V generato

$v_1 = u_4 - u_3 + u_1$

$v_2 = 2u_2 + u_3 - u_4$

$v_3 = 2u_2 + 2u_1 + u_4 - u_3$

Completare l'insieme dei vettori $\{v_1, v_2, v_3\}$ ad una base di V.

Sol: notiamo che

$v_3 - 2v_1 = v_2$ e che v_1 e v_2 sono indip.

Quindi W ha dimensione due e $\{v_1, v_2\}$ ci da una base di W.

Per completare ad una base di V si osserva che v_1, v_2, u_3, u_4 sono indip.

Es 10

Soluzione ANNO 2016-2017 ; appello A Es 3