Sol... , appello A Es 3

TUTORATO 8

ESERCIZIO 1

SOLUZIONE APPELLO LOPEZ, ANNO 2014-2015, ESERCIZIO 1

ESERCIZIO 2

PER CIASCUN SOTTOSPAZIO $U \subseteq \mathbb{Q}^4$ DATO COME INSIEME DI SOLUZIONI DI UN SISTEMA LINEARE OMOGENEO DESCRITTO IN SEGUITO, SI CALCOLI IL SUO INSIEME DI SOLUZIONI U in $\mathbb{Q}^4$ IN FORMA PARAMETRICA E SE NE DETERMINI UNA SUA BASE.

1) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

TROVIAMO LE SOLUZIONI DEL SEGUENTE SISTEMA LINEARE APPLICANDO L'ALGORITMO DI GAUSS JORDAN QUINDI SCRIVIAMO LA MATRICE ASSOCIATA AL SISTEMA LINEARE

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_1$

$R_4 \to R_4 - R_1$

$R_5 \to R_5 - 2R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 2R_2$

$R_4 \to R_4 + 2R_2$

$R_5 \to R_5 + 2R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$R_5 \to R_5 + R_3$

$R_4 \to R_4 + 2R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ -2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ l'unica soluzione è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Il sottospazio $U \subseteq \mathbb{Q}^4$ è il vettore nullo

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad R_2 \to R_2 - R_1$ $\quad R_3 \to R_3 + R_1$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$R_3 \to R_3 + R_2$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Il sistema diventa $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = -t \\ x_4 = t \end{cases}$ FORMA PARAMETRICA $\Rightarrow U = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

ed una base è data dal vettore $v = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 4
Stabilire quali delle seguenti terne di punti sono allineati

Dati tre punti P_0, P_1, P_2 dello spazio affine di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ si dicono allineati se $\dim \overline{P_0 P_1 P_2} = 1$

dove con $\overline{P_0 P_1 P_2} = S_{P_0, W}$ ovvero intendiamo

lo spazio affine passante per P_0 di giacitura W
con $W = \langle \overrightarrow{P_0 P_1}, \overrightarrow{P_0 P_2} \rangle$ dove $\overrightarrow{P_i P_j} = P_j - P_i$

Ora sappiamo che $S_{P_0, W}$ è uno spazio affine su W
$\Rightarrow \dim S_{P_0, W} = \dim W$

$\Rightarrow \dim \overline{P_0 P_1 P_2} = \dim S_{P_0, W} = \dim W$

Quindi affinché i 3 punti sono allineati si deve avere $\dim W = 1$

1) $\{ \underset{P_0}{(1/2, 2)}, \underset{P_1}{(1/2, 100)}, \underset{P_2}{(1/2, \pi/4)} \}$

$v_1 = \overrightarrow{P_0 P_1} = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 98 \end{pmatrix}$

$v_2 = \overrightarrow{P_0 P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/4 \end{pmatrix}$

Ora $W = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1 \rangle$

in quanto i vettori sono proporzionali

$\Rightarrow \dim W = 1 \Rightarrow$ i punti sono allineati

2) $\{ \underset{P_0}{(1,1)}, \underset{P_1}{(1,-1)}, \underset{P_2}{(-1,1)} \}$

$v_1 = \overrightarrow{P_0 P_1} = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$v_2 = \overrightarrow{P_0 P_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$W = \langle v_1, v_2 \rangle$

e si ha che

$\dim W = 2$ perché i vettori sono indipendenti

$\Rightarrow$ i punti NON sono allineati

3) $\{(5,9), (-6,-2), (1,3)\}$
$\quad P_0 \quad P_1 \quad P_2$

ANALOGAMENTE AL PUNTO PRECEDENTE
si ha $\dim W = 2 \Rightarrow$ i vettori non sono allineati

ESERCIZIO 3
Stabilire se i punti $A, B, C \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sono allineati
e in caso affermativo, trovare le equazioni cartesiane
della retta che li contiene
Quando c'è il parametro discuterlo
sol
Possiamo ragionare come nell'esercizio 4
ALTRIMENTI per verificare se i punti sono allineati
possiamo SCRIVERE le equazioni della retta passante
per 2 punti e vedere se il terzo ci appartiene
infatti si ha
3 punti sono allineati $\Leftrightarrow$ giacciono sulla stessa retta

1) $A = (1,0)$, $B = (2,3)$, $C = (3,6)$

le equazioni cartesiane di r passante
per A e B sono della FORMA : $\begin{vmatrix} x-a & y-b \\ l & m \end{vmatrix} = 0$

dove $A = (a,b)$
$\overrightarrow{AB} = (l,m)$

Nel nostro caso $A = (a,b) = (1,0)$
$\overrightarrow{AB} = (1,3)$

$\Rightarrow$ le eq di r sono $0 = \begin{vmatrix} x-1 & y \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3(x-1) - y = 3x - y - 3$

$\rightsquigarrow$ r forma cartesiana $3x - y - 3 = 0$

Per verificare che i punti A, B, C sono allineati vediamo se $C \in r$:
Sostituiamo le equazioni di C nella retta r e otteniamo.

$$3 \cdot 3 - 6 - 3 = 0 \Rightarrow C \in r \Rightarrow \text{sono allineati}$$

2) $A = (5,4)$, $B = (4,6)$, $C = (2,1)$

Ragioniamo come nel punto precedente con
$A = (5,4)$ $\vec{AB} = (-1,-2)$ e otteniamo

$$0 = \begin{vmatrix} x-5 & y-4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (x-5)\cdot(-2) + y-4 = -2x + 10 + y - 4$$

$$\Rightarrow r: \ -2x + y + 6 = 0$$

Vediamo se sono allineati :
$C = (2,1) \leadsto -2 \cdot 2 + 1 + 6 \neq 0 \Rightarrow C \notin r \Rightarrow$ NON SONO ALLINEATI.

3) $A = (2,1)$, $B = (3, k+1)$, $C = (2+k, 2)$
$A = (2,1)$ $\vec{AB} = (1, k)$ $\Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} x-2 & y-1 \\ 1 & k \end{vmatrix} =$

$$= k(x-2) - y + 1 \Rightarrow r: \ kx - y + 1 - 2k = 0 \quad k \in \mathbb{R}$$

• Sia $C = (2+k, 2)$ sostituiamo C in r

$$k(2+k) - 2 + 1 - 2k = \cancel{2k} + k^2 - 2 + 1 - \cancel{2k} = k^2 - 1 = 0$$

$\Leftrightarrow k = \pm 1 \Rightarrow$ sono allineati $\Leftrightarrow k = \pm 1$

ES 5

Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = x_4 = 0\}$$

1) Det le equazioni parametriche di W

Le equazioni cartesiane di W sono $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

Le parametriche $\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = s \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases}$

2) Sia $\mathbb{A}^4$ lo spazio affine di $\mathbb{R}^4$ su se stesso e sia $P = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{A}^4$

determinare le equazioni parametriche e cartesiane di $S_{P,W}$

- equazioni parametriche: $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Le equazioni parametriche di $S_{P,W}$ sono ottenute dalle equazioni parametriche di W traslate per il punto P

$\Rightarrow$ $S_{P,W}$ PARAMETRICA $\begin{cases} x_1 = 1 + s \\ x_2 = 1 + s \\ x_3 = 1 + t \\ x_4 = 1 \end{cases}$

- EQUAZIONI CARTESIANE $S_{P,W}$

Due metodi

1) Considero le equazioni cartesiane di W ed impongo il passaggio per il punto P

$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 1 - 1 = 0 \\ 1 = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$

$\hookrightarrow$ eq cart $S_{P,W}$

2) Considero le equazioni parametriche di $S_{P,W}$ e procedo per sostituzione del parametro

$$\begin{cases} x_1 = 1 + s \\ x_2 = 1 + s \\ x_3 = 1 + t \\ x_4 = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \quad s = x_2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_2 - 1 \\ x_3 = 1 + t \to t \in \mathbb{R} \Rightarrow x_3 \text{ varia in } \mathbb{R} \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

sostituisco nella prima

$\Rightarrow$ equazioni cartesiane di $S_{P,W}$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 6

Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$$

1) Determinare le equazioni parametriche di W

equazioni cartesiane W
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

equazioni parametriche di $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

2) $P = (1, 1, -1, -1) \in \mathbb{A}^4$

equazioni parametriche $S_{P,W}$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

equazioni cartesiane ottenute imponendo il passaggio per il punto P

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

3) Dati $Q = (0,-1,1,1)$, $R = (0,1,1,-2) \in \mathbb{A}^4$

Stabilire se $S_{Q,W} = S_{R,W}$

Sappiamo che uno spazio affine S è univocamente determinato da un qualsiasi suo punto e W

In particolare $\forall\, T \in S$ si ha $S_{Q,W} = S_{T,W}$

• Fissiamo lo spazio affine $S_{Q,W}$ con $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vediamo se $R \in S_{Q,W}$:

Le equazioni parametriche di $S_{Q,W}$ sono

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underset{Q}{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ora $R \in S_{QW} \iff \underset{R}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} = \underset{Q}{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} + t \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + s \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \exists\, t,s$

ovvero $\iff R - P = t v_1 + s v_2 \iff R - P \in W$

Ora $R - Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = v_3$

Affinché $\underset{v_3}{R - Q} \in W$ si deve avere che v_1, v_2, v_3

siano linearmente dipendenti (in quel caso v_3 è combinazione lineare di v_1 e v_2 $\Rightarrow$ appartiene a W)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sono lin indip.}$$

$\Rightarrow R - Q \notin W \quad \Rightarrow R \notin S_{Q,W}$

Ciò se $R \notin S_{Q,W} \Rightarrow S_{Q,W} \neq S_{R,W}$

dim
se si avesse $S_{Q,W} = S_{R,W}$ allora

$R \in S_{R,W} = S_{Q,W}$ ASSURDO