TUTORATO 9

ES 1
Det le equazioni parametriche delle rette di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ aventi v come vettore direzione e passanti per il punto $r \cap s$ in ciascuno dei seguenti casi

1) $v = (2, 7)$ $\quad r: 3x - 2y - 7 = 0 \quad , s: 2x + 3y = 0$

EQUAZIONI PARAMETRICHE DI UNA RETTA IN $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

Passante per $P = (a, b)$ e con q.diente $v = (l, m)$

$$\begin{cases} x = a + lt \\ y = b + mt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Nel nostro caso calcoliamo l'intersezione tra r e s

$$r \cap s: \begin{cases} 3x - 2y - 7 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 7 = 0 \\ x = -\frac{3}{2}y \end{cases} \Rightarrow$$

$$3 \cdot \left(-\frac{3}{2}y\right) - 2y - 7 = 0 \Rightarrow -\frac{9}{2}y - 2y - 7 = 0 \Rightarrow -\frac{13}{2}y = 7 \Rightarrow y = -\frac{14}{13}$$

$$x = \frac{21}{13}$$

$$\Rightarrow P = \left(\frac{21}{13}, -\frac{14}{13}\right)$$

$\Rightarrow$ le equazioni sono
$$\begin{cases} x = \frac{21}{13} + 2t \\ y = -\frac{14}{13} + 7t \end{cases}$$

2) $v = (-5\sqrt{2}, 7)$ $\quad r: x - 4 = 0 \quad s: x + 4 = 1$

In questo caso $P = r \cap s = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow$ le equazioni sono
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - 5\sqrt{2}t \\ y = \frac{1}{2} + 7t \end{cases}$$

ES 2

Rappresentare con eq. parametriche e cartesiane la retta passante per

$A = (1, 2, 1)$ e parallela alla

retta $s: x-1 = 2y+3 = 1-z$

Se chiamiamo r la retta cercata

sappiamo che $r \parallel s \iff$ hanno la stessa giacitura

$\Rightarrow$ calcoliamo la giacitura di s : (cerchiamo le eq parametriche di s)

$$\begin{cases} x-1=t \\ 2y+3=t \\ 1-z=t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}t \\ z = 1-t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la giacitura di s è quella anche di r è data dal vettore

$r = (1, \frac{1}{2}, -1) \Rightarrow$ le eq di r sono

↳ parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + \frac{1}{2}t \\ z = 1 - 1t \end{cases}$$

Trovo le cartesiane?

Prendo le eq param di r : $t = x-1$ sostituisco nella (2) e (3) equazioni

e ottengo

$$\begin{cases} y = 2+\frac{1}{2}(x-1) \\ z = 1-(x-1) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0 \\ z+x-2=0 \end{cases}$$ eq cartesiane di r

ALTRO MODO:

MINORI 2x2 della matrice

$$\begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

ES. 3

Dati i seguenti sottospazi affini, si trovi una base della loro giacitura

1) $A = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 - x_4 = e \}$ ..

Il sottospazio A di $A^4(\mathbb{R})$ ha equazioni cartesiane

$x_1 + x_3 - x_4 = e$

Scrivo le parametriche e trovo la giacitura

$$A: \begin{cases} x_1 = e + s + r \\ x_2 = 0 + t \\ x_3 = 0 + r \\ x_4 = 0 + s \end{cases} \quad r, s, t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow A = S_{Q,W}$ dove $Q = (e, 0, 0, 0)$ e

$$W = \langle \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \rangle \rightarrow \text{Giacitura}$$

una base è data da $\{ v_1, v_2, v_3 \}$

2) $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + z - 5y = 3 \} \cap \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 5 \}$

EQ CARTESIANE DI A $\begin{cases} -x + z - 5y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = 5 + y \\ z = x + 5y + 3 \end{cases}$

PARAMETRICHE

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 0 + t \\ z = 3 + x + 5y = 3 - 5 + t + t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = 5 + t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

una base è data da $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \}$

3) $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -1 \wedge x = 2 \}$

le parametriche di A $\rightsquigarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$

una base è data da $\{ (0, 1, 0) \}$

ES 4:

1) $r: x+2y-1=0$ e $s: -x+y-2=0$

- Vediamo se sono incidenti e calcoliamo il punto di intersezione

$$\begin{cases} x+2y-1=0 \\ -x+y-2=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x+2y-1=0 \\ 3y-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$ punto di intersezione $(-1,1)$

Vediamo se sono parallele e quindi in questo caso essere coincidenti poiché due rette parallele o sono distinte o se sono incidenti sono la stessa retta.

Per vedere se sono // vediamo se hanno la stessa giacitura.

Come calcolo la giacitura?

Scrivo le rette in forma parametrica

$r: x+2y-1=0$ forma cartesiana

Pongo $y=t \rightsquigarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=t \end{cases}$ forma parametrica

giacitura è $W_r = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ (sottospazio generato da $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$)

$s: -x+y-2=0 \rightsquigarrow \begin{cases} x=-2+t \\ y=t \end{cases}$

giacitura è $W_s = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

ma ora $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W_s = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \Rightarrow$ non sono parallele

2) $r: 3x - 2y + 1 = 0$ e $s = \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 4 + 6t \end{cases}$

Vediamo se sono incidenti:
scrivo s in forma cartesiana

$s = \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 4 + 6t \end{cases} \rightsquigarrow t = \frac{1}{6}(y-4)$

$\Rightarrow$
sostituisco nella prima $\qquad x - 2 - \frac{4}{6}(y-4) = 0$

$\Rightarrow \quad x - 2 - \frac{4}{6} y + \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{4}{6} y + \frac{2}{3} = 0$

$\Leftrightarrow$
moltiplico per 6 $\qquad 6x - 4y + 4 = 0$

forma cartesiana di s

Voglio vedere se s e r sono incidenti:

$\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 6x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ il sistema NO SOL

$\Rightarrow$ NON SI INTERSECANO

vediamo se sono // (dovrò scriver r in forma parametrica)

$r: 3x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}t \\ y = t \end{cases}$

$\Rightarrow$ giacitura $W_r = \left\langle \begin{pmatrix} +\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

giacitura di s è $W_s = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$

ora $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{span}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = W_r$

$\Rightarrow$ hanno la stessa giacitura $\Rightarrow$ sono //

SONO PARALLELE E DISTINTE, poiché non si intersecano

ES 3.1

ES 4

Stabilire se le seguenti rette di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sono parallele e coincidenti, parallele e distinte o incidenti.

ES 5

Dati i seguenti insiemi di punti di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, fornire dimensione, eq. cartesiana e param. del sottospazio minimo che li contiene

di:

1) $A = \{\underset{P_0}{(1,0,0)}, \underset{P_1}{(1,1,1)}, \underset{P_2}{(1,3,3)}\}$

Dati 3 punti in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ se sono allineati lo spazio minimo che li contiene è una retta

Altrimenti è un piano

Scrivo la retta passante per P_0 e P_1 e vedo se P_2 ci appartiene

Chiamo r la retta passante per P_0 e P_1

Allora r avrà giacitura $v = \overrightarrow{P_0P_1} = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Scrivo $r: S_{P_0, W} = \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ parametriche e cartesiane $\begin{cases} x-1=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

Si verifica che $P_2 \in r \Rightarrow$ lo spazio minimo che li contiene è una retta

2) $B = \{\underset{P_0}{(1,2,1)}, \underset{P_1}{(2,5,2)}, \underset{P_2}{(-1,-3,-1)}\}$

Si verifica facilmente che P_0, P_1, P_2 non sono allineati $\Rightarrow$ lo spazio minimo che li contiene è un piano

Chiamo π il piano cercato allora

$\pi = S_{P_0, W}$ dove $W = \langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2} \rangle$

$\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{P_0P_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ eq parametriche di π: $S_{P_0, W} = \begin{cases} x = 1 + t - 2s \\ y = 2 + 3t - 6s \\ z = 1 + t - 2s \end{cases}$

eq cartesiana di π: determinare della matrice

$$D = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -(x-1) - (y-2)0 + (z-1) =$$
$$= -x + t$$

3) $C = \{(0,0,0), (1,2,3), (3,2,1)\}$

Analogo al punto prec e si ottiene che lo spazio minimo che le contiene è un piano π

eq parametrica π: $\begin{cases} x = t + 3s \\ y = 2t + 2z \\ z = 3t + z \end{cases}$

eq cartesiana di π: $4x - y + 4z = 0$

4) $E = \{(0,1,1), (4,3,2), (2,2,\frac{3}{3})\}$

Si ottiene che i punti sono allineati
$\Rightarrow$ lo spazio minimo che le contiene è una retta r

eq para di r: $\begin{cases} x = 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ eq carte: $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$

5/6) $G = \{(1,2,0), (2,0,1), (3,3,3), (5,0,2)\}$
$H = \{(1,0,0), (0,1,1), (4,1,0), (5,0,-1)\}$

Abbiamo 4 punti in $A^3(\mathbb{R})$ abbiamo le seguenti possibilità per il sottospazio minimo che li contiene

1) sono allineati $\Rightarrow$ è una retta

2) un piano e si verifica scrivendo il piano contenente 3 di questi punti e verificando che il quarto ci appartiene

3) Nessun piano li contiene $\Rightarrow$ è tutto $A^3(\mathbb{R})$

Nel nostro caso so che la chiusura H lo spazio minimo che li contiene è $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

Es Confrontare la retta $r: \begin{cases} x=1 \\ y-z=0 \end{cases}$

con i sottospazi A, B, C dell'esercizio 5 e dire per ognuno di essi se risultano paralleli, coincidenti o incidenti

Con i sottospazi ~~~ nel caso di incidenza fornire il punto di incidenza.

di

1) A con r

In questo caso abbiamo due rette $\Rightarrow$ sono parallele

$\Rightarrow$ hanno lo stesso giacitura

• Notiamo che però sono esattamente la stessa retta.

2) La retta r è parallela al piano punto per i punti dell'insieme B che chiamo π

$\Leftrightarrow$ $giac(r) \subseteq giac(\pi)$

$$giac(r) = < \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} > \quad e \quad giac(\pi) = < \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}} >$$

Si verifica che v_1, v_2, v_3 sono lin. ind. e
$\Rightarrow r \nparallel \pi$

Calcoliamo l'intersezione:
mettiamo a sistema le eq. cartesiane di r e π

$$\begin{cases} x-1=0 \\ y-z=0 \\ -x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \pi \cap r = (1, 1, 1)$$

3) Il piano π del punto C e la retta r sono incidenti nel punto $(1, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$

ES 7

Sia $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$

Si trovi un'applicazione $\delta : A \times A \to \mathbb{R}$ che renda A uno spazio affine su $\mathbb{R}$.

sol

Consideriamo la funzione $\delta((x,x^2),(y,y^2)) = y - x$

si verifica facilmente che A è uno spazio affine su $\mathbb{R}$