Università degli Studi Roma Tre
A.A. 2022/2023
GE110 - Geometria e algebra lineare 1

Tutorato 10
12 maggio 2023
Tutori: Ilaria Cruciani & Valerio Ardizio

Esercizio 1. *Si scriva l'equazioe del piano π_i per $i = 1, 2, 3$ in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ soddisfacente le seguenti proprietà:*

1. *π_1 passa per $A(1,1,0)$ ed è parallelo ai vettori $u = (1,0,1)$ e $v = (0,2,3)$;*
2. *π_2 passa per $B(0,1,1)$ e $C(3,2,1)$ ed è parallelo a $w = (0,0,5)$*
3. *π_3 passa per il punto $D(1,-1,-2)$ ed è parallelo alle rette*

$$r : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z - 5 = 0 \end{cases} \qquad e \qquad s : \begin{cases} x = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Esercizio 2. *In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane del piano α passante per i punti $A(1,0,0)$, $B(2,1,1)$ e $C(0,1,1)$ e le equazioni parametriche e cartesiane del piano β passante per l'origine $O(0,0,0)$ e parallelo alle rette:*

$$r : \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \qquad e \qquad s : \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ \frac{1}{4}y - z = -2 \end{cases}$$

Infine si determini se i due piano sono paralleli o incidenti.

Esercizio 3. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione 4 e sia $Oe_1e_2e_3e_4$ un riferimento affine.*

1. *Calcolare le equazioni cartesiane del sottospazio affine S passante per $Q(0,1,0,-1)$ e avente per giacitura il sottospazio generato dai vettori $v = 6e_1 + 2e_2 + 2e_3 + e_4$ e $w = e_2$.*
2. *Sia T il sottospazio affine di equazioni*

$$T : \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

S è parallelo a T?

Esercizio 4. *Si consideri lo spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.*

1. *Sia r la retta di equazioni cartesiane*

$$r : \begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare le equazioni parametriche di r;

2. *Sia s la retta di equazioni cartesiane*

$$s : \begin{cases} y + 3 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$$

Dire se r e s sono parallele, sghembe o incidenti. Nel caso in cui risultino incidenti determinare il punto di intersezione;

3. *Determinare le equazioni cartesiane della retta t complanare con le rette r e s e passante per il punto $P(2, 1, -1)$;*

4. *Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta q passante per il punto $Q(2, -1, -1)$ e parallela al vettore $v = (-1, 0, 5)$;*

5. *Dire se t ed q sono parallele, sghembe o incidenti. Nel caso in cui risultino incidenti determinare il punto di intersezione.*

Esercizio 5. *Determinare la mutua posizione delle seguenti coppie di sottospazi affini:*

1. $\pi : x + 3y + z = 2 \qquad r : \begin{cases} x + z = 3 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

2. $\pi : x + 3y + z = 2 \qquad r : \{(2 + 3t, 1 + 5t, 4)t \in \mathbb{R}\}$

3. $r : \{(2 + 3t, 1 + 5t, 4)t \in \mathbb{R}\} \qquad s : \{(5 + 3h, 6 + 5h, 1 + h)h \in \mathbb{R}\}$

4. $r : \{(2 + 3t, 1 + 5t, 4)t \in \mathbb{R}\} \qquad s : r : \{(5 + h, 2 - h, -1 + 3h)h \in \mathbb{R}\}$

Esercizio 6. *Stabilire se le seguenti applicazioni sono lineari:*

1. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definita come* $F(x, y) = (x + y, 2x - y, y)$;

2. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definita come* $F(x, y) = (x + y + 1, 2x - y, y^2)$;

3. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definita come* $F(x, y, z) = (2z - x, x + y, x + 2y + 2z)$;

4. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ *definita come* $F(x, y) = (x - 2y, 2x + y, 5y, 3x - y)$;

5. $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *definita come* $F(X) = X + {}^tX$;

6. $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ *tale che* $p(x) \mapsto xp'(x)$.

Esercizio 7. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita sulla base canonica di $\mathbb{R}^2$ nel modo seguente :*

$$F(e_1) = (1, 2, 1), \quad F(e_2) = (4, 0, 1)$$

1. *Esplicitare* $F(x, y)$;

2. *Stabilire se* $(0, 0, 0), (3, 4, 1), (3, -2, 0) \in \mathrm{Im}(F)$.