Università degli Studi Roma Tre
A.A. 2022/2023
GE110 - Geometria e algebra lineare 1

Tutorato 11
19 maggio 2023
Tutori: Ilaria Cruciani & Valerio Ardizio

Esercizio 1. *Verificare che le seguenti applicazioni sono lineari e determinarne nucleo ed immagine.*

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definita come* $(x, y, z) \mapsto (2z - x, x + y, x + 2y + 2z)$
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definita come* $(x, y, z) \mapsto (3x + y + 2z, -2x - 2y - z, x + z)$
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definita come* $(x, y, z) \mapsto (x + y - z, x - y + z)$
4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ *definita come* $(x, y, z) \mapsto (x - 2y, 2x + y, 5y, 3x - y)$

Esercizio 2. *Sia* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *la cui matrice, rispetto alla base canonica, è:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\dim(Ker(f))$ *e* $\dim(Im(f))$.

Esercizio 3. *Siano* v *e* w *le due basi seguenti, rispettivamente di* $\mathbb{R}^3$ *e di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$v = \{(1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$w = \{(1, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

e F, G, H, I *le seguenti applicazioni lineari:*

1. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definita come* $F(x, y, z) = (x + y, y + 2z, 2x + 2z)$
2. $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *definita come* $G(x, y, z) = (x + y + z, y, -2x - 2z, x + 2y + 3z)$
3. $H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *definita come* $H(x, y, z, w) = (y - z, 2x - 2z, w)$
4. $I : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *definita come* $I(x, y, z, w) = (x - z + 2w, y + w, 2x - y + z, 3x + w)$

Determinare le matrici associate a tali applicazioni $M_v(F), M_{w,v}(G), M_{v,w}(H)$ *e* $M_w(I)$.

Esercizio 4. *Sia* Π_3 *lo spazio vettoriale dei polinomi in una indeterminata di grado* ≤ 3 *a coefficienti reali e* $F : \Pi_3 \to \Pi_3$ *l'applicazione lineare tale che* $F(x^n) = n \cdot x^{n-1}$*, per* $n = 0, 1, 2, 3$. *Calcolarne nucleo e immagine e trovare* $M_e(F)$ *e* $M_b(F)$*, dove* e *è la base canonica* $e = \{1, x, x^2, x^3\}$ *e* b *è la base* $b = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3\}$.

Esercizio 5. *Sia* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *una base di* $\mathbb{R}^4$*. Mostrare che* non *può esistere un'applicazione lineare* $F \in End(\mathbb{R}^4)$ *tale che:*

$$F(e_1 + e_3) = e_1 \quad F(e_2 + e_4) = e_2 \quad F(e_1 + e_2) = e_3 \quad F(e_3 + e_4) = e_4.$$

Esercizio 6. *Sia* f *l'applicazione lineare di* $\mathbb{R}^3$ *cui, rispetto alla base canonica, è associata la matrice*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 11 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}, \text{ con } h \in \mathbb{R}.$$

Una volta trovato il valore h *per cui* f *non è suriettiva:*

1. *Determinare* $\mathrm{Im}(f)$
2. *Determinare per quali valori di* $k \in \mathbb{R}$*, il vettore* $(1, k^2 - k, k) \in Im(f)$
3. *Determinare un vettore di* $\mathbb{R}^3$ *privo di controimmagini*
4. *Determinare* $Ker(f)$
5. *Verificare che* $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$
6. *Esistono dei vettori* $u \in \mathbb{R}^3$ *tali che* $f(u) = (3, 2, -2)$*?*
7. *Trovare i vettori* $v \in \mathbb{R}^3$ *tali che* $f(v) = f(x)$*, dove* $f(x) = (1, 2, -1)$.

Esercizio 7. *Sia* f *l'endomorfismo di* $\mathbb{R}^3$ *rispetto alla base canonica associato alla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Determinare* $Ker(f)$*,* $Im(f)$ *ed una base per ciascuno di essi*
2. *Usando la matrice del cambiamento di base, determinare la matrice associata ad* f *rispetto alla base* $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}$
3. *Determinare* $f^{-1}((3, -1, 2))$.

Esercizio 8. *Sia* $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ *lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali, nell'indeterminata* x*, di grado al più 3. Sia* $h(x) = x^3 + x^2 \in V$ *e si consideri il sottospazio*

$$U := \langle h(x) \rangle \subset V.$$

1. *Calcolare* $\dim(V/U)$
2. *Dati* $p(x) = 2x^3 - x + 3$*,* $q(x) = 9x^3 + 5x^2 - 2x + 6 \in V$*, determinare*

$$\dim(\langle p(x), q(x) \rangle)$$

3. *Detta* $\pi : V \to V/U$ *la proiezione canonica associata al sottospazio* U*, siano*

$$[p(x)] := \pi(p(x)) \text{ e } [q(x)] := \pi(q(x))$$

le classi in V/U *corrispondenti ai polinomi* $p(x)$ *e* $q(x)$ *in 2.; stabilire se*

$$[q(x)] \in \langle [p(x)] \rangle$$

in V/U.