Università degli Studi Roma Tre
A.A. 2022/2023
GE110 - Geometria e algebra lineare 1

Tutorato 12
26 maggio 2023
Tutori: Ilaria Cruciani & Valerio Ardizio

Esercizio 1. *Trovare gli autovalori e gli autovettori delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quali di queste matrici sono diagonalizzabili?

Esercizio 2. *Sia* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'endomorfismo associato alla seguente matrice rispetto alla base canonica:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dire se:

1. F *è iniettivo;*
2. $(1, 1, -1)$ *è un autovettore di* F*;*
3. 2 *è un autovalore di* F.

Esercizio 3. *Per ognuno dei seguenti operatori lineari* $F, G, H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, verificare se sono diagonalizzabili; in tal caso, trovare una base* $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ *di autovettori, scrivere la formula di passaggio da* $M_e(\star)$ *a* $M_b(\star)$ *(con* $\star = F, G, H$*), dove* $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ *è la base canonica, e verificare che quest'ultima matrice è diagonale:*

$$F(x, y, z) = (x + z, -x + y, x + z)$$

$$G(x, y, z) = (x + 2z, 2x + y, x + y + z)$$

$$H(x, y, z) = (x - y + 2z, -x + y - z, 2x + y + z)$$

Esercizio 4. *Sia* $k \in \mathbb{R}$ *e sia* A *la seguente matrice a coefficienti in* $\mathbb{R}$*:*

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & k-2 & 2-k \\ 0 & 1 & 0 \\ k-2 & k-2 & 3-k \end{pmatrix}$$

1. *Trovare gli autovalroi della matrice* A *al variare del parametro* k*;*

2. *Trovare una base per gli autospazi;*

3. *Stabilire se A è diagonalizzabile e trovare una matrice M tale che $M^{-1}AM = B$, dove B è diagonale.*

Esercizio 5. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Calcolare gli autovalori e gli autospazi associati;*

2. *Dire se A è invertibile e, in caso affermativo, trovare l'inversa senza utilizzare il metodo di Gauss-Jordan o il metodo dei cofattori.*

Esercizio 6. *Calcolare il polinomio caratteristico della matrice*

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Esercizio 7. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base e_1, e_2, e_3, e_4. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $v = e_1 - e_3$. Sia F un endomorfismo di V tale che*

$$v \in N(F),\ \ F(e_1 + e_2) = (k^2 - k)v,\ \ F(e_2) = 4e_1 - ke_4,\ \ F(e_2 + e_4) = -e_4.$$

1. *Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F;*

2. *Scelto un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ;*

3. *Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.*

Esercizio 8.

Esercizio 9. *Siano U, V, W tre spazi vettoriali con V di dimensione finita. Siano $G : U \to V$ e $F : V \to W$ due applicazioni lineari. La successione*

$$U \xrightarrow{G} V \xrightarrow{F} W$$

si dice esatta se G è iniettiva, F 'e suriettiva e $Im(G) = ker(F)$. Dimostrare che, in una successione esatta, si ha

1. *U e W hanno dimensione finita;*

2. $\dim V = \dim U + \dim W$.

3. *Trovare un esempio di una successione $U \xrightarrow{G} V \xrightarrow{F} W$, tale che U, V, W sono non nulli, G è iniettiva, F è suriettiva, $F \circ G = O$ (applicazione nulla), ma la successione non è esatta.*