Università degli Studi Roma Tre
A.A. 2022/2023
GE110 - Geometria e algebra lineare 1

Tutorato 1
3 marzo 2023
Tutori: Ilaria Cruciani & Valerio Ardizio

Esercizio 1. *Siano A, B, C le seguenti matrici a coefficienti in $\mathbb{R}$*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolare, se possibile*:*

1. ${}^tA$;
2. ${}^tB$;
3. ${}^tC$;
4. AC;
5. CA;
6. $(BC)A$;
7. $B + (CA)$;
8. BA;
9. $B({}^tA)$;
10. $3 \cdot {}^tA + BC$.

Esercizio 2. *Siano $C, I_2 \in M_2(\mathbb{C})$ tali che* $C = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Calcolare, se possibile*:*

1. $iC^2 + 3C + iI_2$;
2. $3C^2 + 7C^3$;
3. C^tC.

Esercizio 3. *Siano $A, B, C, X \in M_2(\mathbb{R})$*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

Calcolare:

1. $2A - B$;

2. $3A + 2B - 4C$;

3. $-2A + B + 2C - 2B$;

4. $3B + 2(2A - C) - (A + B + 2C)$.

Risolvere, se possibile*, le seguenti equazioni nell'indeterminata* $X \in M_2(\mathbb{R})$*:*

1. $3X + 2(A - X) + B + 2(C + 2X) = 0$;

2. $4A + 2(B + 2X) - 3(C + X + 2A) = 0$;

3. $4(A + B + X) + 4(-A - B + X) - 4(A - B + X) = 0$.

Esercizio 4. *Determinare una matrice* $A \in M_2(\mathbb{R})$*, diversa dalla matrice nulla* 0_2*, tale che* $A^2 = 0_2$*.*

Esercizio 5. *Determinare una matrice* $A \in M_2(\mathbb{R})$*, diversa dalla matrice identità* I_2*, tale che* $A^2 = A$*.*

Esercizio 6. *Siano* $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ *le seguenti matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & k^4 - 3k + 1 & 2 \\ k^4 + 2k - 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} l^3 + \frac{1}{2}l^2 - \frac{1}{2}l & -2 & l^3 + 4l^2 + l - 8 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & l^3 - 5l^2 + 4l & 0 \end{pmatrix}$$

Si trovino i valori del parametro k*,* se esistono*, per i quali la matrice* A *risulti* simmetrica *e i valori del parametro* l*,* se esistono*, per i quali la matrice* B *risulti* antisimmetrica*.*

Esercizio 7. *Dimostrare la seguente affermazione:*
L'inversa di una matrice simmetrica invertibile *è una matrice* simmetrica.
Suggerimento*:* ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$

Esercizio 8. *Dimostrare la seguente afferamzione:*
Se una matrice quadrata è nilpotente di ordine n*, allora essa* **non** *è* invertibile*.*

Esercizio 9. *Dimostrare la seguente affermazione:*
Se $A = (a_{ij})$ *è una matrice diagonale, allora gli elementi di* A^k *sono potenze k-esime degli elementi di* A *(ovvero:* $A^k = (a_{ij}^k)$*).*

Esercizio 10. *Applicando l'algoritmo di Gauss-Jordan, si determinino tutte le soluzioni,* se esistono*, dei seguenti sistemi lineari:*

1. $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y + 6z = 1 \end{cases}$