Università degli Studi Roma Tre
A.A. 2022/2023
GE110 - Geometria e algebra lineare 1

Tutorato 2
10 marzo 2023
Tutori: Ilaria Cruciani & Valerio Ardizio

Esercizio 1. *Si determinino,* se esistono, *tutte le soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni lineari, utilizzando il* metodo di Gauss-Jordan*:*

1. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - y - z - 4t = 9 \\ 4x - 3z - t = 0 \\ 8x - 2y - 5z - 9t = 18 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - 2y + z + 4t = 0 \\ x - y - 4z + 2t = 0 \\ -x + y + 3z - 2t = 0 \\ 3x - 3y + z + 6t = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + 2y - z + t = -1 \\ 2x - y + z - t = 0 \\ 3x - 4y + 3z - 3t = 1 \end{cases}$

Esercizio 2. *Si discutano i seguenti sistemi* al variare *del parametro* $k \in \mathbb{R}$*:*

1. $\begin{cases} kx - y + z = 2 \\ x - ky + z = 3 - k^2 \\ x - y + kz = k + 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + z = k \\ x - ky - z = 1 \\ 2x + y + kz = k + 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y + kz = 2k - 1 \\ x + ky + z = k \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + kz = 1 \\ 3x + ky - 2z = 2 \\ kx + 2z = 1 \end{cases}$

Esercizio 3. *Risolvere il seguente sistema lineare usando il metodo dell'inversa:*

$$\begin{cases} x + y - \frac{z}{2} = 1 \\ 12y - z = 12 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$$

.

Esercizio 4. *Si determini l'inversa delle seguenti matrici:*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Determinare inoltre $(AB)^{-1}$ senza *calcolare il prodotto* AB.

Esercizio 5. *Si scrivano le seguenti matrici come prodotto di matrici elementari:*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Esercizio 6. *Sia* $a \in \mathbb{R}$ *e sia* $A \in M_4(\mathbb{R})$*:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Determinare i valori di* $a \in \mathbb{R}$ *per i quali* A *è (o meno) prodotto di matrici elementari e, in tal caso, esprimere* A *come tale prodotto;*
2. *Determinare i valori di* a *per i quali è possibile (o meno) trasformare* ${}^tA$ *in* I_4 *con sole operazioni elementari.*

Esercizio 7. *Sia* $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$ *una matrice diagonale.*

Mostrare la seguente affermazione:

A è invertibile $\Leftrightarrow a_i \neq 0\ \forall i$ *e in tal caso la sua inversa è* $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^{-1} \end{pmatrix}$

Esercizio 8. *Sia* $V = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$*. Per le seguenti coppie di operazioni si determini quali rendono* $(V, \oplus, *)$ *uno spazio vettoriale.*

1. $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d), \quad t * (a,b) = (ta, b)$;
2. $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b-d), \quad t * (a,b) = (ta, tb)$;
3. $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d), \quad t * (a,b) = (ta, 0)$;
4. $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d), \quad t * (a,b) = (2ta, 2tb)$.

Esercizio 9. *Sia* $k \in \mathbb{R}$ *e si consideri la seguente matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Usando le operazioni elementari si determini per quali valori di* k *la matrice* A *è invertibile;*
2. *Per tali valori di* k *si determini la matrice inversa* A^{-1}.

Esercizio 10. *Sia* $\mathbb{K}$ *un campo e sia* $\mathbb{K}[X]$ *l'insieme di tutti i polinomi a coefficienti in* $\mathbb{K}$.

1. *Si dimostri che* $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$*, con le usuali operazioni di somma di polinomi e di moltiplicazione per scalare, è uno spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$.
2. *Sia* $n \geq 1$ *un intero positivo e sia* $\mathbb{K}[X]_{\leq n}$ *l'insieme dei polinomi di grado al più* n*. L'insieme* $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ *è uno spazio vettoriale (dove le operazioni sono le stesse del punto precedente)?*