Università degli Studi Roma Tre
A.A. 2022/2023
GE110 - Geometria e algebra lineare 1

Tutorato 3
17 marzo 2023
Tutori: Ilaria Cruciani & Valerio Ardizio

Esercizio 1. *Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono suoi sottospazi vettoriali:*

1. $\{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$;
2. $\{(x, y, z) : x + y + z = 1\}$;
3. $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 0\}$;
4. $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$;
5. $\{(x, y, z) : 3y - z = 0,\ x + 2z = 0\}$;
6. $\{(x, y, z) : x = 0\} \cup \{(x, y, z) : z = 0\}$.

Esercizio 2. *Dire quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono suoi sottospazi vettoriali.*

1. $\{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$;
2. $\{(x, y, z) : x - 7y + z = 1\}$;
3. $\{(t, t, t) : 0 \leq t \leq 1\}$;
4. $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 1)\}$;
5. $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ *dove* $H_i := \{(x_1, x_2, x_3) : x_i = 0\}\ \forall i = 1, 2, 3$;
6. $\{(x, y, z) : x + y - 5z = 0 \wedge 2(x + y) = 0\}$;
7. $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$;
8. $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Esercizio 3. *Sia S il sottoinsieme di $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali costituito dai polinomi che hanno -3 come zero. Sia T il sottoinsieme di $\mathbb{R}[x]$ costituito dai polinomi di quarto grado.*
Determinare se S e T sono sottospazi di $\mathbb{R}[x]$.

Esercizio 4. *Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i seguenti sottospazi:*

$$S := \{(x, y, z, w) : x + z = 0, 3y - w = 0\}$$

$$T := \{(x, y, z, w) : x + z = 0, y + 2w = 0\}$$

Determinare $S \cap T$ e $S + T$.

Esercizio 5. *Sia V uno spazio vettoriale e siano S, T due sottospazi.*
Dimostrare che:
$S \cup T$ è un sottospazio di $V \iff S \subseteq T$ o $T \subseteq S$

Esercizio 6. *In $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti vettori:*

$$v_1 = (1,2,1,2) \quad v_2 = (0,0,1,1) \quad v_3 = (1,1,1,1) \quad v_4 = (0,0,0,1) \quad v_5 = (1,2,3,4)$$

Dire se:

1. *I vettori v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 sono linearmente indipendenti;*
2. *I vettori v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente indipendenti;*
3. *I vettori v_1, v_2, v_4, v_5 sono linearmente indipendenti;*
4. *I vettori v_1, v_2, v_3, v_5 generano $\mathbb{R}^4$;*

Esercizio 7. *Mostrare che $\{1, x, x^2\}$ è un insieme di generatori per $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ (ossia lo spazio dei polinomi di grado al più 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$).*
Determinare se l'insieme $\{x, x^2, 4x + \sqrt{\pi}x^2\}$ è un insieme di generatori per $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

Esercizio 8. *Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$:*

1. *$S_1 := \{v_1 = (1,3,2), v_2 = (2,1,-1), v_3 = (1,2,-2)\}$;*
2. *$S_2 := \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (2,0,6), v_3 = (2,3,0)\}$;*
3. *$S_3 := \{v_1 = (4,2,1), v_2 = (2,1,1), v_3 = (4,0,5), v_4 = (1,1,0)\}$;*
4. *$S_4 := \{v_1 = (3,-5,2), v_2 = (1,3,-1)\}$;*

Per ciascuno di tali sottoinsiemi, si dica se è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$, se è linearmente indipendente e se è una base di $\mathbb{R}^3$.
Per quei sottoisiemi che siano linearmente dipendenti, si esibisca una combinazione lineare dei loro elementi che sia nulla e non banale.
Per ogni $i = 1,2,3,4$, si dica se il vettore $v = (1,1,1)$ è combinazione lineare dei vettori di S_i e, quando possibile, si determini una tale combinazione lineare.

Esercizio 9. *In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le seguenti matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si verifichi che l'insieme $K = \{A, B, C, D\}$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$ e si esprima la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ nella base K.